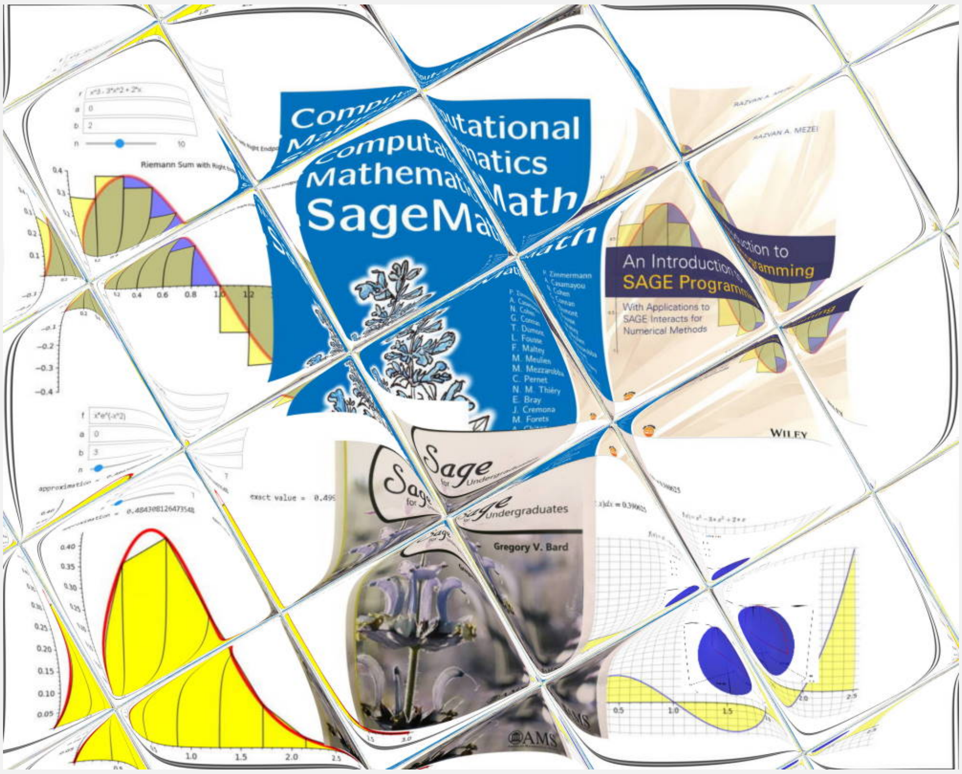
TECHNICKÁ UNIVERZITA V KOŠICIACH

LETECKÁ FAKULTA

Katedra leteckej technickej prípravy

Integrálny počet a numerická matematika

Peter Szabó a Eva Baranová



Košice, 2022

Vydavateľ: Technická univerzita v Košiciach, ISBN: 978-80-553-4185-9

LETECKÁ FAKULTA - FACULTY OF AERONAUTICS
Katedra leteckej technickej prípravy - Department of Aviation Technical Training

Názov: **Integrálny počet a numerická matematika**
Autori: **doc. RNDr. Peter SZABÓ, PhD. a RNDr. Eva BARANOVÁ**
Vydavateľ: **Technická univerzita v Košiciach**
Rok: **2022**
Vydanie: **Prvé**, online verzia 1.00
URL: https://peter.szabo.website.tuke.sk/ipnm22/ipnm22_kniha.pdf
Rozsah: **90** strán
ISBN: **978-80-553-4185-9**

Recenzent: **doc. Ing. Michal TKÁČ, PhD.**
Recenzent: **RNDr. Štefan BEREŽNÝ, PhD.**

Kategória: **P1 - učebné texty pre vysoké školy**
Študijný odbor: **Matematika** - numerická matematika, integrálny počet, programovanie
Mathematics Subject Classification (MSC2020): 65-01,34-01,68-01.

TECHNICKÁ UNIVERZITA V KOŠICIACH
LETECKÁ FAKULTA
Katedra leteckej technickej prípravy

Letecká fakulta

Integrálny počet a numerická matematika

Peter SZABÓ a Eva BARANOVÁ

KOŠICE 2022

Predslov

Táto publikácia vznikla na základe kurzov matematiky a numerickej matematiky autorov na Leteckej fakulte Technickej univerzity v Košiciach v období 2010-2022. Vzhľadom na to, že vydavateľské metódy tiež prechádzajú určitým vývojom, objavujú sa aj nové formy a možnosti publikovania. Preto, autori si zvolili online formu publikovania. Dokument je digitálne podpísaný lokálnym certifikátom autora.

S našou publikáciou sme mali dva hlavné ciele. Prvým je štruktúrované zaznamenávanie databázy vzorových úloh používaných pri výučbe integrálneho počtu a diferenciálnych rovníc. Naším ďalším cieľom je predstaviť systém *počítačovej algebry* založený na používaní *jazyku Python*, ktorý je možné používať pri výučbe *numerickej matematiky*.

Všeobecná úcta a znalosť matematiky a vedy bohužiaľ postupne vymierajú. Táto práca poskytuje pohľad do sveta vedy a matematiky s využitím počítača a numerickej matematiky.

Preface

This publication was created on the basis of the authors' mathematics and numerical mathematics courses at the Aviation Faculty of the Technical University in Košice in the period 2010-2022. Due to the fact that publishing methods are also undergoing certain developments, new forms and possibilities of publishing are also emerging. Therefore, the authors chose an online form of publication. The document is digitally signed with a local certificate of the author.

We had two main goals with our publication. The first is the recording of the *structured database of mathematical tasks* used in the teaching of *integral calculus and differential equations*. Our other goal is to present a *Python-based Computer Algebra* system that can be used in the teaching of numerical mathematics.

Unfortunately, general respect and knowledge of mathematics and science are gradually dying out. This work provides an insight into the world of science and mathematics using computers and numerical mathematics.

16.12.2022, v Košiciach

Peter Szabó

Obsah

Použité matematické symboly

$\mathbb{R}$ - množina reálnych čísel
$\mathbb{C}$ - množina komplexných čísel
$(\frac{df}{dx})$ - derivácia funkcie $f(x)$
$y'(x)$ - derivácia funkcie $y(x)$
$(\frac{dy}{dx})$ - derivácia funkcie $y(x)$
$(\frac{dy}{dx})_{x=x_0}$- derivácia funkcie $y(x)$ v bode x_0
$y'(x_0)$ - derivácia funkcie $y(x)$ v bode x_0
$f'(x_0)$ - derivácia funkcie $f(x)$ v bode x_0 je to aj smernica dotyčnice $p(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ v bode $[x_0, f(x_0)]$
$\frac{f^{(n)}(a)}{n!}$- Taylorov koeficient n -tého rádu funkcie$f$ v bode a
R_n- zvýšok Taylorovho polynómu po n-tom člene
$\int f(x)dx$ - neurčitý integrál funkcie f
$\int\limits_a^b f(x)dx$ - určitý integrál funkcie f na intervale $\langle a, b\rangle$
$\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ - limita postupnosti S_n
$L_k(x) = \frac{(x-x_0)...(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})...(x-x_n)}{(x_k-x_0)...(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})...(x_k-x_n)}$ - Lagrangeov bázický polynóm
$\mathcal{L}\{f(t)\}$- Laplaceov obraz funkcie $f(t)$
$\mathcal{L}_{-1}\{F(p)\}$ - Laplaceov originál funkcie $F(p)$
$\simeq$- približná hodnota výrazu

Použité programové symboly

$+++$—- začiatok programového kódu
\# riadok v programovom kóde s komentárom
$x.n()$ - desatinné vyjadrenie čísla x alebo približná hodnota čísla
$show(x)$ - symbolické vyjadrenie čísla x
x - celé číslo alebo zlomkové vyjadrenie racionálneho čísla x
oo - označenie nekonečna v programe Python
numpy - numerická knižnica programu Python
scipy - knižnica pre vedecké výpočty programu Python
@interact - príkaz na vytvorenie interaktívne stránky
desolve - príkaz na riešenie diferenciálnych rovníc
f(x).diff - derivácia funkcie *f(x)*
derivative(f(x))- derivácia funkcie *f(x)*
definite_integral(f(x),x,a,b) - určitý integrál funkcie f podľa premennej x na intervale $\langle a, b\rangle$
——— koniec programového kódu

Niektoré použité internetové odkazy

SageMath Cell Server:https://sagecell.sagemath.org/

Jupiter Notebook:https://jupyter.org/

G. Cardano: https://en.wikipedia.org/wiki/Gerolamo_Cardano

N.Tartaglia: https://en.wikipedia.org/wiki/Niccol%C3%B2_Fontana_Tartaglia

Galoisova teória:https://en.wikipedia.org/wiki/Quintic_function

Dirichletova funkcia:https://sk.wikipedia.org/wiki/Dirichletova_funkcia

Lebesqueov integrál:https://sk.wikipedia.org/wiki/Lebesgueov_integr%C3%A1l

Chybová funkcia:https://cs.wikipedia.org/wiki/Chybov%C3%A1_funkce

Besselova funkcia:https://cs.wikipedia.org/wiki/Besselova_funkce

1. Úvod

Prvá časť elektronickej publikácie obsahuje zbierku úloh z integrálneho počtu (viac ako 300 príkladov) a diferenciálnych rovníc (viac ako 130 príkladov). V druhej časti sú postupy, algoritmy ako riešiť tieto úlohy numericky pomocou systému počítačovej algebry (po anglicky Computer Algebra). Je to aj zbierka algoritmov a programových kódov v systéme *SageMath* v. 9.x, resp. v jazyku *Python 3* (približne 160 príkladov). Publikácia je určená učiteľom, študentom vysokých škôl matematiky či numerickej matematiky alebo programovania ale aj odbornej verejnosti, ktorá sa zaoberá s problematikou integrálneho počtu a riešením diferenciálnych rovníc. Programy a algoritmy publikácie sú spustiteľné na serveri: https://sagecell.sagemath.org/.

Druhá kapitola obsahuje základné vzorce a algoritmy, ktoré sú aplikované v programoch v kapitolách 5, 6, 7, 8. Tretia kapitola je zbierka úloh na výpočet integrálov rôzneho typu, štvrtá je zbierka úloh základných diferenciálnych rovníc. Piata kapitola slúži na osvojenie si základov programovania v systéme SageMath, resp. Python. Šiesta kapitola je o použití matematických vzorcov a rovníc a sú tu aj základy diferenciálneho počtu v SageMath. Siedma kapitola sa venuje numerickému integrovaniu, ôsma obsahuje algoritmy na numerické riešenie diferenciálnych rovníc.

1.1. Systémy počítačovej algebry a virtuálny počítač

V práci miesto SageMath alebo Python budeme používať stručnejší názov Sage na označenie systému SageMath s jazykom Python. Sage a MATLAB patria do systémov, ktoré nazývame Computer Algebra. Tieto sytémy umožňujú symbolické matematické výpočty, dokážu vytvárať vzorce, ktoré slúžia na presný výpočet. Tiež podporujú algebrické, numerické a vedecké výpočty. Tieto výpočty sa týkajú štúdia a vývoja algoritmov na manipuláciu s matematickými výrazmi , výpočtami a inými matematickými objektmi.

Systémy Sage a MATLAB v rámci výučby a výskumu aplikujeme pomocou virtuálneho počítača. Krátky elektronický kurz o virtuálnom počítači pre účely numerickej matematiky v sieti Technickej univerzity v Košiciach je v publikácii [12]. V kurze sa nachádzajú informácie ako pracovať s uvedenými systémami na virtuálnom alebo desktop počítači. Ešte je potrebné poznamenať, že Sage používa ako komunikačné rozhranie Jupiter notebook. V prípade použitia tohto rozhrania je potrebné Sage inštalovať a spustiť Sage Notebook Server. Na vykonanie jedného výpočtu existuje internetové rozhranie Sage Cell Server. Na použitie Cell Servra je potrebné len internetové spojenie.

V práci predpokladáme, že čitateľ pozná základy typografického systému LaTex [4]. Tento systém je použitý v Sage pri zadávaní matematických vstupov, a pri generovaní matematických výstupov.

1.2. Použité zdroje a obmedzenia

Existuje veľa dobrých zdrojov na štúdium diferenciálneho a integrálneho počtu. Našimi kritériami výberu boli študijný obsah, prístup k práci a jazyk. Pre štúdium diferenciálneho počtu odporúčame publikácie [7], [5] a integrálneho počtu [13], [6]. Vypočítané príklady sa nachádzajú v publikácii [8]. Pre účely numerickej matematiky používame knihu [3]. Špeciálne matematické algoritmy boli čerpané z publikácie [10]. Treba poznamenať, že naša publikácia je na základnej úrovni numerickej matematiky.

Pri výbere systému Sage hral najdôležitejšiu úlohu prístup k technológii. Sage používa programovací jazyk podobný Pythonu. Python bol vyvinutý ako open source projekt, podporuje objektovo orientované, štruktúrované aj funkcionálne programovanie, preto ho používa veľký počet programátorov.

Popredné univerzity, tak ako aj Technická univerzita v Košiciach používajú aj systém MATLAB (pozri [1]) a iné špeciálne systémy na vedecké a matematické výpočty.

Pre prácu so systémom Sage odporúčame literatúru ([9, 11, 2]). Tieto zdroje sú v anglickom jazyku.

Publikácia má niekoľko obmedzení. Nie sú v nej riešené oblasti ako: fyzikálny význam derivácie, parciálne derivácie a viacnásobné integrály, parciálne diferenciálne rovnice ale aj ďalšie. Vzorce a definície sú tu len uvedené, podrobnejší teoretický výklad tu nie je, je možné to nájsť hlavne v publikáciách [7, 13].

Jedným z cieľov našej publikácie je prezentácia príkladov používaných v integrálnom počte a diferenciálnych rovniciach, ktoré sme použili pri výučbe matematiky v rokoch 2010-2022. Žiaľ, vzorovú databázu sa nám nepodarilo previesť do dnešných formátov, takže tieto stránky nemusia mať dostatočnú kvalitu.

2. Vzorce a algoritmy

2.1. Derivácie a vzorce

Kľúčové matematické výrazy tejto kapitoly sú: limita funkcie, spojitosť funkcie, spojitá funkcia, elementárne funkcie, derivácia funkcie, derivácie vyššieho rádu, polynóm, koreň polynómu, vzorec na nájdenie koreňa polynómu, Taylorov polynóm, Taylorov rad, Mclaurinov rad, Taylorov koeficient, analytická funkcia, polomer konvergencie, priamka, smernica priamky, normála, derivácia v bode, derivácia na intervale. Definície a vlastnosti týchto matematických pojmov, výrazov je možné nájsť v literatúre [7].

Kľúčové výrazy computer science (pojmy informatiky): symbolická matematika, symbolický výpočet, interaktívne stránky, LaTex, $f(x).derivative$, $f(x).diff$, riešenie rovníc (*solve*)

2.1.1. Výpočty derivácie

Derivácia funkcie f v bode x_0 je číslo

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \tag{1}$$

keď existuje *vlastná* (konečná) *limita* na pravej strane rovnice (1), ktorú označíme ako $f'(x_0)$.
Ďalšie symboly na označenie derivácie f v bode x_0: $(\frac{df}{dx})_{x=x_0}$, keď $y = f(x)$, tak $y'(x_0)$ alebo $(\frac{dy}{dx})_{x=x_0}$.

Ak existuje derivácia funkcie f v každom bode $x \in M$ tak funkcia f' je derivácia funkcie f na množine M. Na označenie derivácie funkcie f na množine M sú použité aj symboly:

$$(\frac{df}{dx}),\ y',\ (\frac{dy}{dx}).$$

Na výpočet derivácie v Sage sú použité príkazy : *f(x).diff(), derivative(f(x))* alebo *f(x).derivative(),* pozri príklady In[13], In[14] v časti *Derivácie.*

V príklade In[13] výstup je generovaný v Sage (computer science) formáte

+++————
```
f(x) = cos(x)^7
f(x).diff()
```
($f(x) = cos(x)^7$)

Výstup: `-7*cos(x)^6*sin(x)`

—————-

V príklade In[14] výstup je generovaný v matematickom formáte

+++————
```
f(x) = cos(x)^7
show(f(x).derivative())
```
Výstup:$-7 * cos(x)^6 * sin(x)$

————-

V príklade In[18] konštrukcia *@interact* slúži na *tvorbu interaktívnych stránok.* Parameter *auto_ update=True* znamená, že pri zadaní nových vstupov systém automaticky prepočítava program podľa aktualizovaných vstupov. Matematické výrazy typu $f'(x) =$ (`LatexExpr("f^{'}(x)=")`) zadávame pomocou systému LaTex. Nasledovný príklad umožňuje vytvorenie tabuľky s deriváciami, kde sú derivácie jednotlivých *elementárnych* aj *zložených funkcií.* Programový kód :

+++———-
```
@interact
def derivative_interact(
    f = input_box(default = x^2-7,label="f(x)=" ),auto_update=True):
    q=LatexExpr("f^{'}(x)=")
    show(q,f(x).diff())
```
———

V Sage je možné použiť aj *symbolickú matematiku* na tvorbu vzorcov. V príklade vypočítame deriváciu funkcie x^n ($(x^n)' = nx^{n-1}$). Na mocninu n budeme pozerať ako na symbol premennej.

+++————
```
var('n')
f(x) = x^n
diff(f(x),x)
```
Výstup: `n*x^(n - 1)` (nx^{n-1})

————

Na tvorbu vzorcov je príklad In[6], vzorec na výpočet koreňov polynómu 3. stupňa. To je výsledok (matematikov z obdobia r. 1530 - 1550, *N. Tartaglia* a *G. Cardano*), ktorým prvý krát boli prekonané diela starogréckych matematikov. Dlho hľadaný vzorec na riešenie koreňov polynómu 3. stupňa náš počítač nájde za 63 milisekúnd, pozri In[7]. Existuje vzorec aj na nájdenie koreňov polynómu 4. stupňa. *E. Galois* (roky 1830 - 1832) ukázal, že vzorec na nájdenie koreňov polynómu 5. a vyššie stupňa neexistuje. Pre približné nájdenie koreňov polynómu preto používame *numerické metódy*. Z časových dôvodov tu uvádzame len odvodenie vzorca na nájdenie koreňov polynómu 2. stupňa.

Funkcia $f(x) = ax^2 + bx + c$ je polynóm 2. stupňa. Hodnota u je koreň polynómu $f(x)$, ak $f(u) = au^2 + bu + c = 0$. Pre nájdenie vzorca výraz $au^2 + bu + c$ doplníme na štvorec

$$au^2 + bu + c = a(u^2 + \frac{b}{a}u) + c = a(u^2 + \frac{b}{a}u + \frac{b^2}{4a^2}) - \frac{b^2}{4a} + c = a(u + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2}{4a} + c = 0$$

$$a(u + \frac{b}{2a})^2 = \frac{b^2}{4a} - c = \frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

$$(u + \frac{b}{2a})^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

$$u = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \tag{2}$$

Uvedený vzorec pomocou symbolickej matematiky a príkazu *solve* v Sage vieme odvodiť príkazom `(a*x^2 + b*x + c).solve(x)`. Tento príkaz znamená, že riešime rovnicu $ax^2 + bx + c = 0$ pre premennú x, pozri príklad In[5]. Koeficienty a, b, c definujeme ako premenné (symboly) v systéme Sage. V matematike to sú konštatnty, koeficienty polynómu druhého stupňa.

2.1.2. Taylorov polynóm (mnohočlen)

Existujú derivácie vyššieho rádu funkcie f , ktoré sú definované na základe matematickej indukcie ako derivácie derivácií, napríklad derivácia druhého rádu funkcie f je derivácia prvej derivácie funkcie f'.

Nech derivácie $f^{(r)}(r = 1, 2, \cdots, n)$ funkcie$f$ na intervale I sú spojité. Nech $a \in I$. Potom pre každé $x \in I$

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f^{(2)}(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1} + R_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{(k)!}(x-a)^k + R_n \tag{3}$$

je *Taylorov polynóm (mnohočlen) funkcie* f v bode a, na intervale I. R_n je zvýšok funkcie po n-tom člene. Koeficient

$$b_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \tag{4}$$

je *Taylorov koeficient n-tého rádu.*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{(n)!}(x-a)^n \tag{5}$$

je *Taylorov rad funkcie* $f(x)$ na intervale $|x - a| < R$. Hodnota R je *polomer konvergencie radu* (5) a je definovaný nasledovným spôsobom:

Hovoríme, že funkcia f *je analytická* v bode $x = a$, keď existuje postupnosť $b_0, b_1, \ldots, b_n, \ldots$, pre ktorú

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-a)^n \tag{6}$$

a existuje limita

$$\lim_{n\to\infty} |\frac{b_{n+1}}{b_n}| = \frac{1}{R}, \tag{7}$$

pričom $R > 0$. Potom číslo R je polomer konvergencie radu (6). Keď vo vzťahu (5) $a = 0$, tak. tak hovoríme, že (5) je *Mclaurinov rad.*

Taylorove polynómy hrajú dôležitú úlohu v numerickej matematike, lebo za ich pomoci, vieme aproximovať ľubovoľnú spojitú funkciu s ľubovoľnou presnosťou. Taylorove rady vieme vypočítať pomocou príkazu $f(x).series(x, 8)$. V tomto prípade vypočítame *Taylorov rad* v bode $a = 0$ a zvýšok po 8. člene vo výstupe bude označený ako $O(x^8)$, pozri príklad In[43]. Ďalší príkaz $f(x).taylor(x, 2, 10)$ je na výpočet *Taylorovho polynómu*. V tomto prípade vypočítame *Taylorov polynóm* a neuvádzame zvýšok po n-tom člene ($n = 10$), vieme tu zadať číslo a ($a = 2$) pozri príklad In[44]. Taylorove polynómy rôzneho stupňa sú vypočítané v príklade In[44] a *Taylorove koeficienty* (4) v príklade In[41].

2.1.3. Geometrická interpretácia derivácie

Všeobecná rovnica priamky $p(x)$, ktorá prechádza bodom $P = [x_0, y_0]$ je

$$p(x) = m(x - x_0) + y_0 \tag{8}$$

kde číslo m je *smernica priamky* $p(x)$.

Nech $P = [x_0, y_0]$ je bod na (rovinnej) krivke danej funkciou $y = f(x)$. Dotyčnica ku krivke je priamka, ktorá sa dotýka funkcie $y = f(x)$ v bode $P = [x_0, y_0]$ a nepretína krivku. *Dotyčnica funkcie* $f(x)$ v bode $P = [x_0, y_0]$ je priamka:

$$l(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) \tag{9}$$

Číslo $f'(x_0)$ (prvá derivácia funkcie $f(x)$ v bodex_0) je *smernica dotyčnice funkcie f (x) v bode* $[x_0, f(x_0)]$= $[x_0, y_0]$.

Normála je kolmá priamka na dotyčnicu v danom bode. Platí tvrdenie, že keď m je smernica priamky $m(x - x_0) + y_0$, tak kolmá priamka v bode $[x_0, y_0]$ má smernicu k, pre ktorú platí, že $k = -\frac{1}{m}$. Preto, číslo $-\frac{1}{f'(x_0)}$ je smernicou *normály ku grafu funkcie* $y = f(x)$ v bode $P =$$[x_0, f(x_0)]$= $[x_0, y_0]$.

V príkladoch In[47], In[48] je aj grafické zobrazenie smernice vstupnej funkcie. V programe je možné zadať funkciu, súradnice dotykového bodu a interval na ktorom skúmame dotyčnice.

2.1.4. Úlohy - vzorce a derivácie

Niekoľko príkladov z diferenciálneho počtu (ďalšie príklady sa nachádzajú v publikáciách [7, 8]):

Podľa definície vypočítajte deriváciu funkcie $f(x)$ v bode x_0

1. $f(x) = x, x_0 = 2$

2. $f(x) = x^2, x_0 = 1$

3. $f(x) = \frac{1}{x-1}, x_0 = 3$

Vypočítajte deriváciu funkcie $f(x)$ na intervale I.

4. $f(x) = x,\ I = [-1, 1]$

5. $f(x) = x^2,\ I = [0, 2]$

6. $f(x) = \frac{1}{x-1},\ I = [2, 3]$

Nájdite Taylorov mnohočlen funkcie $f(x)$ n-tého stupňa v bode $a = 0$.
7. $f(x) = e^x$, $n = 4$
8. $f(x) = \frac{1}{x-1}$, $n = 3$
9. $f(x) = x^4 - 5x^3 + 2x - 3$, $n = 4$

Vypočítajte Taylorov koeficient funkcie $f(x)$ n-tého stupňa v bode $a = 0$.
10. $f(x) = e^x$, $n = 4$
11. $f(x) = \frac{1}{x-1}$, $n = 3$
12. $f(x) = x^4 - 5x^3 + 2x - 3$, $n = 4$

Nájdite rovnice dotyčnice a normály ku grafu funkcie $f(x)$ v bode P.
13. $f(x) = e^x$, $P = [?, 1]$
14. $f(x) = sin(x)$, $P = [\pi, ?]$
15. $f(x) = cos(x)$, $P = [?, 1]$

2.2. *Integrálny počet*

Význam integrálneho počtu a riešenia matematických problémov spočíva aj v tom, že podporuje aktívne získavanie vedomostí a myslenie zamerané na riešenie problémov. Teraz definujeme niektoré základné pojmy integrálneho počtu, ktoré sú potrebné pre numerické algoritmy.. Podrobné teoretické poznatky sa nachádzajú v literatúre [13].

2.2.1. *Neurčitý integrál - primitívne funkcie*

Funkcia F sa nazýva *primitívna funkcia* k funkcii f na intervale $[a, b]$, ak

$$F'(x) = f(x) \tag{10}$$

pre každé $x \in [a, b]$.

Neurčitým integrálom funkcie f na intervale $[a, b]$ rozumieme množinu všetkých primitývnych funkcií k funkcii f na intervale $[a, b]$, Označenie neurčitého integrálu

$$\int f(x)dx = F(x) + C \tag{11}$$

kde $C \in R$ je ľubovoľná konštanta. Vo vzťahu (11) $\int$ - je integračný znak, $f(x)$- je integrovaná funkcia, C je integračná konštanta, a x - je integračná premenna.

Je niekoľko metód na výpočet neurčitého integrálu podľa typu funkcie $f(x)$, pozri sekciu *Integrály.*

V Sage na výpočet primitívnej funkcie slúži príkaz `F=indefinite_integral(f(x),x).`

Funkcia `indefinite_integral` sa nachádza v špeciálnej programovej knižnici preto do kódu programu je potrebné vložiť príkaz: `from sage.symbolic.integration.integral import indefinite_integral,` pozri In[2] a In[3] v sekcii *Numerické integrovanie.* Táto sekcia obsahuje informácie o integrálnom počte (neurčitý, určitý integrál, Riemannova definícia, numerické integrovanie)

2.2.2. *Určitý integrál - Newton Leibnitzov vzorec*

Nech $y = F(x)$ je primitívna funkcia k funkcii $y = f(x)$, funkcia $f(x)$ je ohraničená na konečnom intervale $\langle a, b\rangle$ a spojitá v tomto intervale s výnimkou konečného počtu bodov. Potom

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \tag{12}$$

Tento vzťah sa nazýva *Newton-Leibnizov vzorec (* po anglicky *formula).*

Pri riešení úloh sa používa zápis (aby bolo jasné, do ktorej funkcie sa dosadzuje)

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a) \tag{13}$$

Pri samotnom výpočte určitého integrálu postupujeme tak, že najskôr vypočítame neurčitý integrál $\int f(x)dx = F(x)$, nájdeme primitívnu funkciu $F(x)$ k funkcii $f(x)$. Potom dosadíme krajné body intervalu a a b do funkcie $y = F(x)$ a odčítame hodnoty $F(b)$–$F(a)$.

Určitý integrál je číslo, plošný obsah rovinnej oblasti ohraničenej grafom funkcie $y = f(x)$, osou x a priamkami $x = a$ a $x = b$, za predpokladu, že $f(x) \geq 0$ pre $x \in \langle a, b\rangle$.

Na výpočet určitého integrálu v Sage slúži príkaz `definite_integral(f(x),x,a,b).`

Funkcia `definite_integral` sa nachádza v špeciálnej programovej knižnici preto do kódu programu je potrebné vložiť príkaz: `from sage.symbolic.integration.integral import definite_integral,` pozri úlohy In[4] - In[7] v sekcii *Numerické integrovanie.*

2.2.3. *Určitý integrál - Riemanova definícia*

Uvažujme funkciu $y = x^2$ na intervale $[0, 1]$. Ako je možné vypočítať plošný obsah rovinného útvaru ohraničeného funkciami: $y = x^2$, $y = 0$ (x-ová os), $x = 0$ (y-ová os) a $x = 1$. Túto množinu bodov môžeme definovať ako:

$$M = \left\{(x, y);\ y \leq x^2 \& \ x \in \langle 0, 1\rangle\right\}$$

Interval $\langle 0, 1\rangle$ môžeme rozdeliť na n rovnaké častí, $\langle 0, 1\rangle = \left\langle 0, \frac{1}{n}\right\rangle \cup \left\langle \frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right\rangle \cup \cdots \cup \left\langle \frac{n-1}{n}, \frac{n}{n}\right\rangle$. Toto je ***delenie intervalu***, každý podinterval má dĺžku $\frac{1}{n}$. Nad každým podintervalom $\left\langle \frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right\rangle$ môžeme vypočítať plošný obsah obdĺžnika, ktorý má výšku $(\frac{i}{n})^2$(je to funkčná hodnota funkcie $y = x^2$ v bode $\frac{i}{n}$). Tento plošný obsah bude $\frac{1}{n} \cdot \frac{i^2}{n^2}$. Preto plošný obsah množiny M môžeme odhadnúť ako súčet plošných obsahov

$$S_n = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n} \cdot \frac{2^2}{n^2} + \frac{1}{n} \cdot \frac{3^2}{n^2} + \cdots + \frac{1}{n} \cdot \frac{n^2}{n^2} = \frac{1}{n^3}(1 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2)$$

Postupnosť $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ nazývame ***postupnosťou integrálnych súčtov*** a limitu (ak existuje)

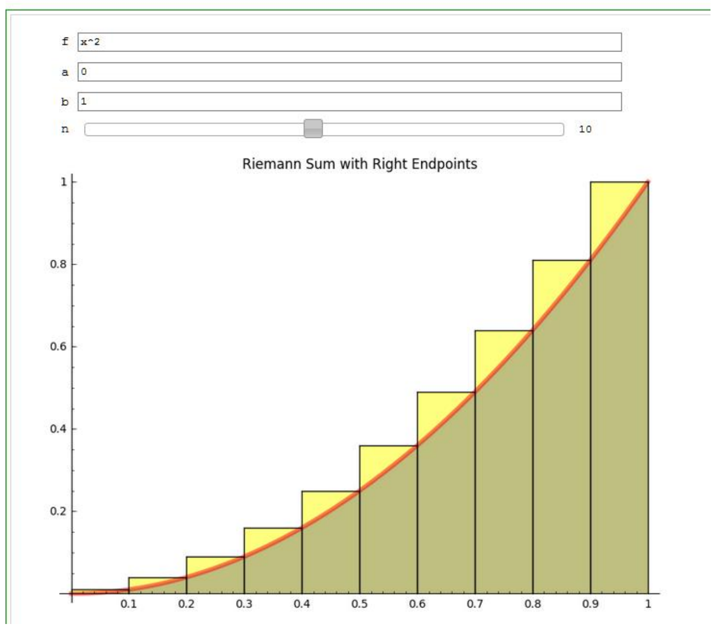
$$\lim_{n\to\infty} S_n = I \tag{14}$$

nazývame ***určitým integrálom funkcie*** $y = x^2$ na intervale $\langle 0, 1\rangle$. Túto definíciu je možné zovšeobecniť pre ľubovoľnú spojitú funkciu $y = f(x)$ na intervale $\langle a, b\rangle$.

Náš príklad vysvetluje len princíp Riemannovej definície určitého integrálu a niektoré základné pojmy (*delenie intervalu, integrálne súčty, horný integrálny súčet, určitý integrál*). Presné definície jednotlivých pojmov sa nachádzajú v literatúre [13].

Na záver môžeme vypočítať limitu, nášho určitého integrálu:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3}(1 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3}(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3}(\frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6}) = \frac{1}{3}$$



Obr. 1: $y = x^2$, delenie intervalu $\langle a, b\rangle = \langle 0, 1\rangle$, $n = 10$.

Je to plošný obsah množiny M v daných merných jednotkách, pozri In[7], In[8] v sekcii *Numerické integrovanie*. Delenie intervalu na Obrázku 1 vytvára tzv. *horný integrálny súčet*. Po anglicky je to *Riemann sum with Right Endpoints*. Je potrebné poznamenať, že existuje zovšeobecnenie Riemannovho integrálu, pozri Dirichletova funkcia, Lebesgueov integrál.

2.2.4. Aplikácie určitého integrálu

Predpokladajme, že $f(x)$ a $g(x)$ sú *integrovateľné funkcie* na intervale $\langle a, b\rangle$ a $f(x) \geq g(x) \geq 0$ pre každé $x \in \langle a, b\rangle$. Potom vieme vypočítať

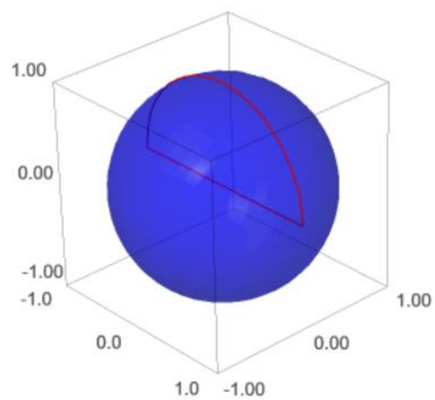
- Plošný obsah rovinného útvaru:

$$S = \int_a^b (f(x) - g(x))dx \tag{15}$$

- Objem rotačného telesa okolo osi x :

$$V = \pi \int_a^b (f^2(x) - g^2(x))dx \tag{16}$$

Pri výpočte objemu jednotkovej gule (vzťah (16)) boli nastavené nasledovné parametre: funkcia $f(x) = \sqrt{(1-x^2)} \geq 0$, $\langle a, b\rangle = \langle -1, 1\rangle$, $g(x) = 0$.




```
Objem  = 4/3*pi
```

Obr. 2: Rotačné teleso - Guľa

- Dĺžku rovinnej krivky, danej integrovateľnou funkciou $f(x) \geq 0$ na $\langle a, b\rangle$, ktorá má deriváciu na intervale $\langle a, b\rangle$:

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}dx \tag{17}$$

- Povrch rotačného telesa, danej integrovateľnou funkciou $f(x) \geq 0$ na $\langle a, b\rangle$, ktorá má deriváciu na intervale $\langle a, b\rangle$:

$$P = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}dx \tag{18}$$

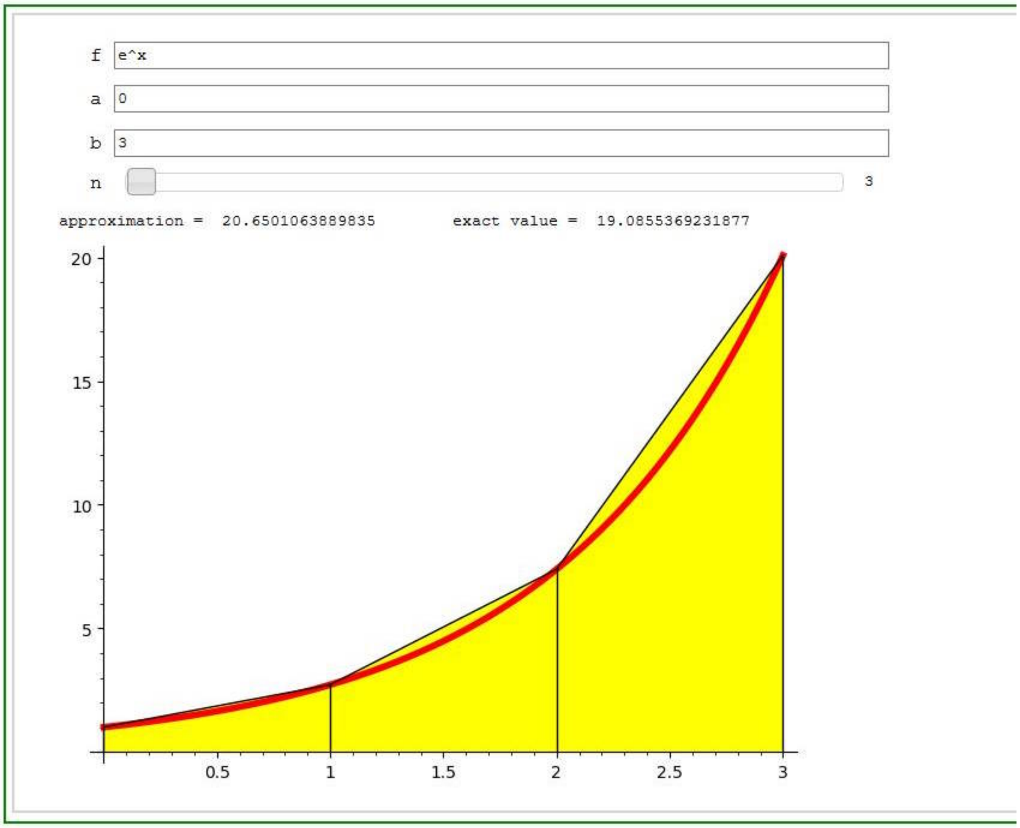
Príklady na jednotlivé aplikácie určitého integrálu sa nachádzajú v časti *Integrály,* ďalej pozri príklady In[10] - In[11] v sekcii *Numerické integrovanie* na aplikáciu výpočtu objemu rotačného telesa.

2.2.5. Numerický výpočet určitého integrálu

Určitý integrál je číslo. Na odhad, určitého integrálu funkcie $f(x)$ na intervale $\langle a, b\rangle$ používame numerický výpočet, vzorec *lichobežníkovej metódy*

$$\int_a^b f(x)dx \simeq h(\frac{1}{2}f(x_0) + f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_{n-1}) + \frac{1}{2}f(x_n)) \tag{19}$$

kde $h = \frac{b-a}{n}$ a n je počet delení intervalu $\langle a, b\rangle$.



Obr. 3: Numerické integrovanie - lichobežníková metóda - grafický výstup

Na Obr. 3, parametre algoritmu sú nasledovné $f(x) = e^x$, $n = 3$, $x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3, h = \frac{b-a}{n} = \frac{3}{3} = 1$.

Programový kód pre numerické integrovanie (naprogramovanie vzťahu (19) v jazyku Python, znak # znamená poznámku)

+++————-

```
# Program 1 - Numericke integrovanie
def Trapezoidal(f, a, b, n):
    h = (b-a)/n
    S = 1/2*f(a)
    for i in [1,2,..,n-1] :
        S += f(a+i*h)
    S += 1/2*f(b)
    S *= h
    return S.n()

@interact
def TrapezoidalInteract(
    f = input_box(default = e^x),
    a = input_box(default =  0),
    b = input_box(default = 10),
    n = input_box(default =  8)):
    f(x)=f
    print  ("Approximation =",  Trapezoidal(f, a, b, n))
```

———

Podprogram `Trapezoidal (f,a,b,n)` slúži na implementáciu vzorca (19). Hlavný program obsahuje interaktívne nastavenie vstupov a volanie *podprogramu* na numerický výpočet určitého integrálu. Podprogramy môžu sa nachádzať aj v programových knižniciach. Programový kód nižšie používa programovú knižnicu

numpy a funkciu numpy.trapz na riešenie numerického integrovania. *Numpy* je programová knižnica jazyka Python pre numerické výpočty, aktualizujeme ju príkazom import numpy.
+++————-

```
# Program 3 - Numericke integrovanie, numpy
import numpy
@interact
def TrapezoidByNumPy(
    f = input_box(default = e^x),
    a = input_box(default = 0),
    b = input_box(default = 3),
    n = slider(vmin=2, vmax=50, step_size = 1)):

    #needed to avoid the warning message
    f(x)=f

    #compute the size of each subinterval
    delta_x = (b-a)/n

    #compute the intermediate points
    xi_values = [a,a+delta_x,..,b]

    #compute the corresponding y values
    fxi_values = [f(i) for i in xi_values]

    #compute the Trapezoidal Rule value
    print ("approximation = ", numpy.trapz(fxi_values,dx=delta_x).n(),\
          "\t exact value = ", integrate(f(x), x, a, b).n())
```

———

Tieto programy je možné nájsť aj v príkladoch In[12] a In[13] v sekcii *Numerické integrovanie*.

Záverečné poznámky: Na numerický výpočet integrálu slúži príkaz integral_numerical(sin(x)/x, 0, 1)-výsledok tejto operácie je interval (0.946083070367183, 1.0503632079297087e-14) v ktorom sa nachádza riešenie určitého integrálu. Tento interval je uvedený tak ako Sage to vypočítal. Výsledky integrovania vieme zapísať číselne alebo aj symbolicky.
+++————-

```
# Integral funkcie exp(-x**2), na intervale <0,oo)
# Symbolicke a ciselne vyjadrenie vysledku
g = integrate(exp(-x**2), x, 0, infinity);
show(g)
g.n()
```

———

Symbolický výstup (show(g)) je $\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$ a číselný (g.n()) je 0.886226925452758. Určité integrály vieme riešiť aj symbolicky, v tomto prípade výsledok integrovania môže byť aj funkcia v ktorej sa nachádza premenná, ktorú upresníme dodatočne. V nasledovnom príklade sú definované výstupné premenné, symboly. Výsledok nasledovného kódu je funkcia: $u(x) = \frac{1}{2}\pi e^{-x}$. Premenná x môže nadobudnúť rôzne hodnoty, napr. pre $x = 0$, výsledok výpočtu bude $u(0) = \frac{1}{2}\pi$. V zdrojovom kóde Sage symbol nekonečno ∞ zadávame ako „oo“. V zdrojovom kóde nepoužívame diakritiku.
+++————

```
# Symbolicky vypocet urciteho integralu na intervale <0,oo)
u = var('u');
f = x * cos(u) / (u^2 + x^2);
assume(x>0);
h = f.integrate(u, 0, infinity); show(h)
```

———

2.3. Diferenciálne rovnice

2.3.1. Riešenie diferenciálnych rovníc

V príklade riešime diferenciálnu rovnicu $x'(t) + x(t) = 2$. V Sage základný kód na riešenie diferenciálnych rovníc je:

+++———-

```
# Riesenie obycajnej diferencialnej rovnice
# vstupy: x'(t)+ x(t) = 2; pozri [1]
# vystup: funkcia x(t)
var('t')
x = function('x')(t)
de = diff(x,t) + x - 2
p=desolve(de==0, x)
```

———

Na riešenie diferenciálnych rovníc (dif. rovníc) slúži príkaz `deslove,` príkaz `de = diff(x,t) + x - 2` definuje rovnicu $x'(t) + x(t) - 2 = 0$, pozri príklad In[14], In [15] v sekcii *Numerické riešenie diferenciálnych rovníc*. Riešením tejto dif. rovnice je množina funkcií $x(t) = (C + 2e^t)e^{(-t)}$, kde C je ľubovoľné reálne číslo, pozri príklad In[30].

2.3.2. Začiatočná podmienka, typy dif. rovníc

Pri riešení je možné zadať aj *začiatočnú podmienku*, ktorá potom definuje funkciu na výstupe. Na zadanie začiatočnej podmienky sa používa príkaz `ics.` Kód programu pri zadaní začiatočnej podmienky, bodu $P = [0, 10]$. Táto podmienka znamená, že pre riešenie $x(t)$ platí, že , riešenie prechádza bodom P, ($x(0) = 10$).

+++———

```
# Riesenie obycajnej diferencialnej rovnice
# vstupy: x'(t)+ x(t) = 2; x(0) = 10 - pozri [1]
# vystup: funkcia x(t)
var('t')
x = function('x')(t)
de = diff(x,t) + x - 2
p=desolve(de==0, x, ics = [0,10])
```

———-

Riešením diferenciálnej rovnice je jedna funkcia $x(t) = 2(e^t + 4)e^{(-t)}$ pre ktorú platí, že $x(0) = 10$, pozri príklady In[16], In[17].

Existuje niekoľko typov diferenciálnych rovníc. Diferenciálne rovnice typu:

$$P(x) = y'Q(y) \tag{20}$$

sú *separovateľné* (premennú x a funkciu y vieme separovať, riešením rovnice je množina funkcií $y(x)$)

$$P(x, y) + Q(x, y)y' = 0 \tag{21}$$

sú *homogénne* ($P(x, y), Q(x, y)$ sú homogénne funkcie dvoch premenných rovnakého stupňa s rovnakým oborom definície), pozri príklad In[21]

$$y' + yP(x) = Q(x) \tag{22}$$

sú *lineárne dif. rovnice prvého rádu* (v rovnici je prvá derivácia y a funkcia y)

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = f(x) \tag{23}$$

sú *lineárne dif. rovnice druhého rádu* s pravou stranou

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0 \tag{24}$$

sú *lineárne dif. rovnice druhého rádu bez pravej strany*

$$y' + P(x)y = Q(x)y^{\alpha} \tag{25}$$

sú *Bernoulliho dif. rovnice.*

Existuje aj mnoho ďalších typov diferenciálnych rovníc. Pre každý známy typ diferenciálnych rovníc existuje metóda na riešenie. V Sage je parameter `show_method=True`, ktorý vráti typ diferenciálnej rovnice. Pri riešení zložitých diferenciálnych rovníc je potrebné použiť parameter `contrib_ode=True.` Metóda `expand()` slúži na zjednodušenie výsledku.

+++————

```
x = var('x')
y = function('y')(x)
DE = diff(y,x)+2*y == x**2-2*x+3
p = desolve(DE, y, show_method=True ).expand()
show(p)
```

————

Tento príklad rieši lineárnu diferenciálnu rovnicu $y' + 2y = x^2 - 2x + 3$. Riešenie je

$$\left[\frac{1}{2}x^2 + Ce^{(-2x)} - \frac{3}{2}x + \frac{9}{4}, linear\right],\ C \in \mathbb{R}$$

kde `linear` znamená, že je to lineárna diferenciálna rovnica.

Rôzne typy a príklady diferenciálnych rovníc sa nachádzajú v kapitole *Výpočet diferenciálnych rovníc - zbierka úloh*, riešenia v Sage v kapitole *Numerické riešenie diferenciálnych rovníc.* Vyššie uvedené programy slúžili na riešenie diferenciálnych rovníc pomocou programu *Computer Algebry.* Boli to *programové riešenia* diferenciálnych rovníc. *Numerické riešenie* znamená riešenie *pomocou špeciálnych matematických metód.*

2.3.3. Eulerova metóda na riešenie dif. rovníc

Predpokladajme, že máme diferenciálnu rovnicu $y' = f(x, y)$ pre $x \in \langle a, b\rangle$ a začiatočnú podmienku $y(a) = y_0$ $(x_0 = a)$. Riešenie bude generované iteračne,

$$x_0 = a, x_1 = a + h, x_2 = a + 2h, \cdots, x_n = a + nh = b \tag{26}$$

z toho vyplýva, že $h = \frac{b-a}{n}$. Je to delenie intervalu $\langle a, b\rangle$ na n rovnakých častí. Pri Eulerovej metóde funkčné hodnoty $y(x)$ budú vypočítané nasledovne

$$y(x_0) = y_0$$

$$y(x_i) = y(x_{i-1}) + hf(x_{i-1}, y(x_{i-1})), i = 1, 2, \cdots, n \tag{27}$$

Programový kód vzorca (26) s konkrétnymi vstupmi :$f(x, y), n, a, b, y_0$. Riešime diferenciálnu rovnicu $y' = f(x, y)$, na intervale $\langle 0, 2\rangle$, začiatočná hodnota riešenia je $y(0) = y_0 = 8$.

+++————-

```
var("x,y")
f(x,y)=cos(x)+sin(y)+x*y
n=15
a=0
b=2
y0=8
#vypocet velkosti krokov
h = (b-a)/n
#vytvorenie tabulky funkcnych hodnot
table = [(a, y0)]
prevx = a
prevy = y0
for i in [1,2,..,n]:
    #vypocet novej hodnoty
```

```
    newx = prevx+h
    newy = prevy + h*f(prevx, prevy)
    #pridanie k tabulke funkcnych hodnot
    table += [(newx, newy)]
    #inicializacia dalsieho kroku
    prevx = newx.n()
    prevy = newy.n()
    #nakreslenie bodov
table list_plot(table,size = 50).show()
```

———

Grafický výstup programu sa nachádza v príklade In[31]. Interaktívnu verziu kódu (interktívne je možné zadať vstupné údaje) je možné nájsť v príklade In[32].

2.3.4. Runge-Kutta Dorman Prince metóda

Príklad In[33] obsahuje aplikáciu *Runge - Kutta Dorman Prince* metódy na riešenie diferenciálnych rovníc (označenie algoritmu je `rk8pd`). V súčasnosti je to štandardná metóda na riešenie diferenciálnych rovníc v programovacom jazyku Python. Uvažujme diferenciálnu rovnicu s parametrom μ.

$$x''(t) - \mu(1-x^2)x'(t) + x(t) = 0$$

Ak $y_0(t) = x(t)$, $y_1(t) = x'(t)$ potom

$$y_0'(t) = y_1$$

$$y_1'(t) = \mu(1-y_0^2)y_1 - y_0$$

Programový kód nižšie definuje, vypočíta riešenie dif. rovnice. Najprv je potrebné definovať objekt T na riešenie dif. rovnice, potom diferenciálnu rovnicu - funkciu *f_ 1*. Pomocou objektu T definujeme aj metódu, začiatočné podmienky, počet bodov a interpolačné riešenie. Na záver zobrazíme výsledok.
+++———

```
T = ode_solver()
def f_1(t,y,params): return [y[1],params[0]*(1-y[0]^2)*y[1]-y[0]]
T.function = f_1
T.algorithm = "rk8pd"
T.ode_solve(y_0=[1,0], t_span=[0,100], params=[10],num_points=1000)
f = T.interpolate_solution()
plot(f, 0, 100)
```

———-

2.3.5. Interpolácia - Lagrangeov polynóm

Niektoré numerické metódy na výpočet diferenciálnych rovníc (napr. Eulerova metóda, metóda Runge Kutta) pracujú tak, že nájdu postupnosť bodov

$$[x_i, y_i], i = 0, 1, ..., n, \tag{28}$$

ktoré sa nachádzajú na riešení dif. rovnice. Predpokladáme, tie body sú vzájomne rozdielne, t.j. $x_i \neq x_j$ práve vtedy, keď $i \neq j$. Ďalej predpokladáme, že máme k dispozícii začiatočný bod $[x_0, y_0]$ a diferenciálnu rovnicu. Je možné nájsť polynóm n-tého stupňa, pre ktorý platí vzťah(28). Je to *Lagrangeov interpolačný polynóm p* pre ktorý platí:

$$p(x_i) = y_i, i = 0, 1, ..., n.$$

Nie je ťažké ukázať, že je to polynóm

$$p(x) = y_0 L_0 + y_1 L_1 + \cdots + y_n L_n \tag{29}$$

ak polynómy L_k pre $k = 0, 1, ..., n$ definujeme ako

$$L_k(x) = \frac{(x - x_0)...(x - x_{k-1})(x - x_{k+1})...(x - x_n)}{(x_k - x_0)...(x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1})...(x_k - x_n)} \tag{30}$$

Pre polynóm *p(x)* platia vzťahy $p(x_i) = y_i, i = 0, 1, ..., n.$

Polynóm $p(x)$ zo vzťahu (29) je *Lagrangeov interpolačný polynóm* a polynómy $L_k(x)$ sú *Lagrangeove bázické polynómy.* Existujú aj iné typy interpolácie. Programový kód pre výpočet Lagrangeovej interpolácie (bez diakritiky).

+++————

```
# Interpolacia - Lagrangeov polynom
# Na vstupe mame hodnoty [xi,yi], i=0,1,,.,n
# Na vystupe polynom p radu n pre ktory f(xi)=yi, i=0,1,,.,n

def Lagrange_Basis(i, points):
    var("x")
    n = len(points)-1
    Li=1
    for j in [0,1,..,n] :
        if(i!=j):
        Li *= (x-points[j][0])/(points[i][0]-points[j][0])
    return Li

def Lagrange_Polynomial(points):
    var("x")
    n = len(points)-1
    p=0*x
    for i in [0,1,..,n]:
        p +=  points[i][1]*Lagrange_Basis(i,points)
    return p.full_simplify()

points = [(-3,-15),(-1,-5),(0,1),(2,10), (3,15)]
# print ("p(x)=", Lagrange_Polynomial(points))
r2=LatexExpr("␣f(x)=")+latex(Lagrange_Polynomial(points))
show(r2)
```

————

V príklade uvažujeme množinu bodov `points = [(-3,-15),(-1,-5),(0,1),(2,10), (3,15)]`. Na základe týchto bodov podprogram `Lagrange_Basis(i, points)` vypočíta Lagrangeov bázicky polynóm `Li` podľa vzťahu (30). A podprogram `Lagrange_Polynomial(points)` vypočíta polynóm $p(x)$. Hlavný program načíta vstupné body, vypočíta a zobrazí Lagrangeov polynóm pre dané body. V našom prípade je to polynóm

$$p(x) = \frac{1}{18}x^4 - \frac{1}{18}x^3 + \frac{11}{18}x^2 + \frac{11}{2}x + 1.$$

2.3.6. Laplaceova transformácia

Existuje veľa pomocných metód na riešenie diferenciálnych rovníc. Jedna taká metóda je *Laplaceova transformácia.* Aplikácia tejto metódy predpokladá znalosť *komplexnej analýzy.* Na túto transformáciu filozoficky môžeme pozerať aj ako na transformáciu medzi časom a priestorom a naopak.

Nech je daná reálna funkcia $f : \langle 0, \infty) \to \mathbb{R}$ potom nevlastný integrál

$$F(p) = \int_0^\infty f(t)e^{-pt}dt \tag{31}$$

sa nazýva *Laplaceov integrál* funkcie $f(t)$, pričom $p = (s + i\omega) \in \mathbb{C}$, je komplexné číslo. Preto vzťah (31) môžeme napísať ako

$$F(s+i\omega) = \int_0^\infty e^{-st} f(t) e^{-i\omega t} dt \tag{32}$$

Ak existuje $p \in \mathbb{C}$ pre ktoré integrál zo vzťahu (30) konverguje tak funkcia $F(p)$ je *Laplaceov obraz* funkcie $f(t)$, označíme to ako

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(p) \tag{33}$$

Laplaceova transformácia má veľa vlastností: platí linearita, vieme ju derivovať, integrovať, definujeme operáciu konvolučného súčinu, existuje k nej inverzná transformácia, ktorú označíme ako

$$\mathcal{L}_{-1}\{F(p)\} = f(t) \tag{34}$$

Funkciu *f(t)* nazývame aj *Laplaceov originál.* Vlastnosti transformácie umožňujú aplikovať túto transformáciu pri riešení diferenciálnych rovníc.

Nasledovný Sage kód vypočíta *Laplaceov obraz* funkcie $f(t)$.

+++———-

```
# Laplaceov obraz
# Vstup: funkcia f(t)
# Vystup: F(p) - Laplaceov obraz f(t)
f(t) = t*cos(t)
F(p) = laplace(f, t, p)
```

———-

Ďalší kód nájde *Laplasov originál* podľa Laplasovho obrazu.

+++———-

```
# Laplaceov original
# Vstup: F(p) - Laplaceov obraz f(t)
# Vystup: Laplaceov original - funkcia f(t)
F(p) = 5*e^(-3)/(p - 1)^2
f(t)=inverse_laplace( F(p), p, t )
```

———-

Aplikáciu Laplaceovej transformácie na riešenie diferenciálnych rovníc je možné nájsť v literatúre. Niektoré riešené príklady sú v publikácii [8].

1. Neurčitý integrál

Použitím algebrických úprav a základných vzorcov vypočítajte integrály.

1. $\int (3x^2 + 2x - 1)\, dx$ $\left[x^3 + x^2 - x + c\right]$

2. $\int \left(\frac{2}{x\sqrt{x}} - \frac{5}{x^2}\right) dx$ $\left[-\frac{4}{\sqrt{x}} + \frac{5}{x} + c\right]$

3. $\int x^2(x^2 + 1)\, dx$ $\left[\frac{x^5}{5} + \frac{x^3}{3} + c\right]$

4. $\int \left(x^3 + 1\right)^2 dx$ $\left[\frac{x^7}{7} + \frac{x^4}{2} + x + c\right]$

5. $\int \frac{x^3 + 3x - 1}{x} dx$ $\left[\frac{x^3}{3} + 3x - \ln|x| + c\right]$

6. $\int \frac{x^2 - 3x + 4}{\sqrt{x}} dx$ $\left[\frac{2}{5}x^2\sqrt{x} - 2x\sqrt{x} + 8\sqrt{x} + c\right]$

7. $\int \frac{(x-1)^3}{\sqrt{x}} dx$ $\left[\frac{2}{7}x^3\sqrt{x} - \frac{6}{5}x^2\sqrt{x} + 2x\sqrt{x} - 2\sqrt{x} + c\right]$

8. $\int \frac{\left(\sqrt{x} + 2\right)^3}{x} dx$ $\left[\frac{2}{3}x\sqrt{x} + 6x + 24\sqrt{x} + 8\ln|x| + c\right]$

9. $\int \left(\cos x + 2\sqrt[5]{x^3}\right) dx$ $\left[\sin x + \frac{5}{4}x\sqrt[5]{x^3} + c\right]$

10. $\int \left(\sin x + \frac{3}{\sqrt{4 - 4x^2}}\right) dx$ $\left[-\cos x + \frac{3}{2}\arcsin x + c\right]$

11. $\int \left(2^x + \sqrt{\frac{1}{x}}\right) dx$ $\left[\frac{2^x}{\ln 2} + 2\sqrt{x} + c\right]$

12. $\int \left(10^{-x} + \frac{x^2 + 2}{x^2 + 1}\right) dx$ $\left[x + arctgx - \frac{1}{10^x \ln 10} + c\right]$

13. $\int \frac{x^2}{3\left(1 + x^2\right)} dx$ $\left[\frac{1}{3}(x - arctgx) + c\right]$

14. $\int cotg^2(x)\, dx$ $[-x - cotg(x) + c]$

15. $\int \frac{dx}{x^2 + 7}$ $\left[\frac{1}{\sqrt{7}} arctg \frac{x}{\sqrt{7}} + c\right]$

16. $\int \frac{x}{x^2 - 3} dx$ $\left[\frac{1}{2}\ln\left|x^2 - 3\right| + c\right]$

17. $\int \frac{x^2}{x^3 + 1} dx$ $\left[\frac{1}{3}\ln\left|x^3 + 1\right| + c\right]$

18. $\int (tg(x) + cotg(x))\, dx$ $\left[\ln|\sin x| - \ln|\cos x| + c\right]$

19. $\int \frac{e^{2x}}{1 - 3e^{2x}} dx$ $\left[-\frac{1}{6}\ln\left|1 - 3e^{2x}\right| + c\right]$

20. $\int \frac{1}{\cos^2 x \sin^2 x} dx$ $[tgx - cotgx + c]$

2. Integrovanie substitučnou metódou

1.$\int \sin(5x+2)\,dx$ $\left[-\frac{1}{5}\cos(5x+2)+c\right]$

2.$\int \frac{dx}{\cos^2 3x}$ $\left[\frac{1}{3}tg\,3x+c\right]$

3.$\int 4^{2-3x}dx$ $\left[-\frac{1}{3\ln 4}4^{2-3x}+c\right]$

4.$\int \frac{x}{(x+1)^2}dx$ $\left[\ln|x+1|+\frac{1}{x+1}+c\right]$

5.$\int \sqrt{x+3}\,dx$ $\left[\frac{2}{3}\sqrt{(x+3)^3}+c\right]$

6.$\int \frac{x^2}{x^6+4}dx$ $\left[\frac{1}{6}arctg\frac{x^3}{2}+c\right]$

7.$\int \frac{x}{\sqrt{x^2-4}}dx$ $\left[\sqrt{x^2-1}+c\right]$

8.$\int \frac{\cos x}{5+\sin x}dx$ $\left[\ln|5+\sin x|+c\right]$

9.$\int (\ln x)^5\frac{dx}{x}$ $\left[\frac{1}{6}(\ln x)^6+c\right]$

10.$\int x^2e^{x^3}dx$ $\left[\frac{1}{3}e^{x^3}+c\right]$

11.$\int \frac{dx}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}$ $\left[\arcsin(\ln x)+c\right]$

12.$\int \sqrt{\sin x}\cos x dx$ $\left[\frac{2}{3}\sin^{\frac{3}{2}}x+c\right]$

13.$\int e^{-x}dx$ $\left[-e^{-x}+c\right]$

14.$\int \frac{2^x}{\sqrt{1-4^x}}dx$ $\left[\frac{1}{\ln 2}\arcsin 2^x+c\right]$

15.$\int \frac{\ln x-2}{x(\ln x)^2 dx}$ $\left[\ln|\ln x|+\frac{2}{\ln x}+c\right]$

16.$\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$ $\left[-2\cos\sqrt{x}+c\right]$

17.$\int cotg(3x+2)\,dx$ $\left[\frac{1}{4}\ln|\sin(3x+2)|+c\right]$

18.$\int x\,tg(x^2+1)\,dx$ $\left[-\frac{1}{2}\ln|\cos(x^2+1)|+c\right]$

19.$\int \frac{dx}{2+\sqrt{x+1}}$ $\left[2\sqrt{x+1}-4\ln(2+\sqrt{x+1})+c\right]$

20.$\int \frac{tgx}{\ln^2(\cos x)}dx$ $\left[\frac{1}{2\ln^2\cos x}+c\right]$

3. Integrovanie metódou per partes

1. $\int x \ln x \, dx$ $\left[\frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{4}x^2 + c\right]$

2. $\int \frac{\ln x}{x^2} \, dx$ $\left[-\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} + c\right]$

3. $\int \ln(2x+3) \, dx$ $\left[x \ln(2x+3) - x + \frac{3}{2}\ln|2x+3| + c\right]$

4. $\int x \cos x \, dx$ $\left[x \sin x + \cos x + c\right]$

5. $\int arccotg(x) \, dx$ $\left[x \, arccotg(x) + \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + c\right]$

6. $\int \frac{x}{\sin^2 x} dx$ $\left[-x \cot gx + \ln|\sin x| + c\right]$

7. $\int x \sin(3x) \, dx$ $\left[-\frac{1}{3}x\cos 3x + \frac{1}{9}\sin 3x + c\right]$

8. $\int 5xe^{-4x} dx$ $\left[-\frac{5}{4}xe^{-4x} - \frac{5}{16}e^{-4x} + c\right]$

9. $\int x \, arctg(x) \, dx$ $\left[\frac{x^2}{2} arctg(x) - \frac{x}{2} + \frac{1}{2} arctg(x) + c\right]$

10. $\int \frac{x}{5^x} \, dx$ $\left[-\frac{x5^{-x}}{\ln 5} - \frac{5^{-x}}{\ln^2 5} + c\right]$

11. $\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx$ $\left[2\sqrt{x}\ln x - 4\sqrt{x} + c\right]$

12. $\int 4x^3 \ln(x^5) \, dx$ $\left[5x^4 \ln x - \frac{5}{4}x^4 + c\right]$

13. $\int x^2 \sin x \, dx$ $\left[-x^2 \cos x + 2x \sin x + 2\cos x + c\right]$

14. $\int e^x \cos 2x \, dx$ $\left[\frac{e^x}{5}(\cos 2x + 2\sin 2x) + c\right]$

15. $\int (x^2+5)\cos x \, dx$ $\left[(x^2+3)\sin x + 2x\cos x + c\right]$

16. $\int \sin(\ln x) \, dx$ $\left[\frac{x}{2}(\sin(\ln x) - \cos(\ln x)) + c\right]$

17. $\int x^3 \cos x \, dx$ $\left[(x^3 - 6x)\sin x + (3x^2 - 6)\cos x + c\right]$

18. $\int x^2 e^{3x} dx$ $\left[\frac{e^{3x}}{27}(9x^2 6x + 2) + c\right]$

19. $\int (x^2 - 2x + 5)e^{-x} dx$ $\left[-e^{-x}(x^2+5) + c\right]$

20. $\int (x^2 + 3x - 3)\cos x \, dx$ $\left[(x^2 + 3x - 5)\sin x + (2x+3)\cos x + c\right]$

21. $\int e^x arc\, tg(e^x) \, dx$ $\left[e^x arctg(e^x) - \frac{1}{2}\ln(1+e^{2x}) + c\right]$

4. Integrovanie racionálnych funkcií

1. $\int\left(\frac{3}{x}+\frac{5}{x+2}\right)dx$ $\qquad\left[3\ln|x|+5\ln|x+2|+c\right]$

2. $\int\frac{4}{(x-3)^7}\,dx$ $\qquad\left[\frac{-2}{3(x-3)^6}+c\right]$

3. $\int\frac{dx}{x^2+6x+13}$ $\qquad\left[\frac{1}{2}arctg\frac{x+3}{2}+c\right]$

4. $\int\frac{4x-9}{x^2-6x+13}\,dx$ $\qquad\left[2\ln\left(x^2-6x+13\right)+\frac{3}{2}arctg\frac{x-3}{2}+c\right]$

5. $\int\frac{12x-5}{4x^2+15}\,dx$ $\qquad\left[\frac{3}{2}\ln\left|x^2+\frac{15}{4}\right|-\frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{3}}arctg\frac{2x}{\sqrt{15}}+c\right]$

6. $\int\frac{4x^3-15x+14}{2x^2+5x-3}\,dx$ $\qquad\left[x^2-5x+\ln|2x-1|+7\ln|x+3|+c\right]$

7. $\int\frac{2x^2-5x-32}{x^2-3x-10}\,dx$ $\qquad\left[2x+2\ln|x+2|-\ln|x-3|+c\right]$

8. $\int\frac{3x-7}{x^3+x^2+4x+4}\,dx$ $\qquad\left[\ln\frac{x^2+4}{(x+1)^2}+\frac{1}{2}arctg\frac{x}{2}+c\right]$

9. $\int\frac{1}{x^3+x^2+x}\,dx$ $\qquad\left[\frac{1}{2}\ln\frac{x^2}{x^2+x+1}-\frac{1}{\sqrt{3}}arctg\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+c\right]$

10. $\int\frac{x^4}{x^2+2}\,dx$ $\qquad\left[\frac{x^3}{3}-2x+\frac{4}{\sqrt{2}}arctg\frac{x}{\sqrt{2}}+c\right]$

11. $\int\frac{x^3+3}{x+1}\,dx$ $\qquad\left[\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+x+2\ln|x+1|+c\right]$

12. $\int\frac{x^2+4x+6}{x^3+5x^2+6x}\,dx$ $\qquad\left[\ln\frac{x^3+3x^2}{x+2}+c\right]$

13. $\int\frac{x+31}{(x-1)(x+3)^2}\,dx$ $\qquad\left[2\ln\left|\frac{x-1}{x+3}\right|+\frac{7}{x+3}+c\right]$

14. $\int\frac{x^2+3x+2}{x^2+x+2}\,dx$ $\qquad\left[x+\ln\left|x^2+x+2\right|-\frac{2}{\sqrt{7}}arctg\frac{2x+1}{\sqrt{7}}+c\right]$

15. $\int\frac{-x^2}{x^4+1}\,dx$ $\qquad\left[\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|-\frac{1}{2arctgx+c}\right]$

16. $\int\frac{12}{x\left(x^2+1\right)^2}\,dx$ $\qquad\left[\frac{6}{x^2+1}-6\ln\left(x^2+1\right)+12\ln|x|+c\right]$

17. $\int\frac{x}{\left(x^2+3x+3\right)^2}\,dx$ $\qquad\left[-\frac{x+2}{x^2+3x+3}-\frac{2}{\sqrt{3}}arctg\frac{2x+3}{\sqrt{3}}+c\right]$

18. $\int\frac{x^5+2x^3+4x+4}{x^4+2x^3+2x^2}\,dx$ $\qquad\left[\frac{x^2}{2}-2x-\frac{2}{x}+2\ln\left|x^2+2x+2\right|-2arctg(x+1)+c\right]$

19. $\int\frac{x^4+1}{x^3-x^2+x-1}\,dx$ $\qquad\left[\frac{x^2}{2}+x+\ln\frac{|x-1|}{\sqrt{x^2+1}}-arctgx+c\right]$

5. Integrovanie goniometrických funkcií

1. $\int \frac{1}{\cos x}\,dx$ $\left[\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sin x+1}{\sin x-1}\right|+c\right]$

2. $\int \cos^2 x\,dx$ $\left[\frac{x}{2}+\frac{\sin 2x}{4}+c\right]$

3. $\int \frac{1}{9+4\cos x}\,dx$ $\left[\frac{2}{\sqrt{65}}\,arctg\left(\sqrt{\frac{5}{13}}\,tg\frac{x}{2}\right)+c\right]$

4. $\int \frac{1}{4-5\sin x}\,dx$ $\left[\frac{1}{3}\ln\left|\frac{tg\frac{x}{2}-2}{2tg\frac{x}{2}-1}\right|+c\right]$

5. $\int \frac{1}{\cos x-2\sin x+3}\,dx$ $\left[arctg\left(tg\frac{x}{2}-1\right)+c\right]$

6. $\int \frac{1+tg\,x}{1-tg\,x}\,dx$ $\left[\ln\left|\frac{tg^2\frac{x}{2}+1}{tg^2\frac{x}{2}+2tg\frac{x}{2}-1}\right|+c\right]$

7. $\int \frac{1}{8-4\sin x+7\cos x}\,dx$ $\left[\ln\left|\frac{tg\frac{x}{2}-5}{tg\frac{x}{2}-3}\right|+c\right]$

8. $\int \sin^2 x\cos^2 x\,dx$ $\left[\frac{1}{32}\left(x-\frac{\sin 4x}{4}\right)+c\right]$

9. $\int \frac{\sin 2x}{1+\sin^2 x}\,dx$ $\left[\ln\left|1+\sin^2 x\right|+c\right]$

10. $\int \frac{1}{4-3\sin^2 x}\,dx$ $\left[\frac{1}{2}\,arctg\frac{tgx}{2}+c\right]$

11. $\int \frac{1}{\sin^2 x+3\cos^2 x+2}\,dx$ $\left[\frac{\sqrt{5}}{5\sqrt{3}}\,arctg\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\,tgx\right)+c\right]$

12. $\int \frac{\cos^4 x}{\sin^6 x}\,dx$ $\left[-\frac{1}{5tg^5 x}+c\right]$

13. $\int tg^3 x\,dx$ $\left[\frac{tg^2 x}{2}+\ln\left|\cos x\right|+c\right]$

14. $\int \frac{\cos^4 x}{\sin x}\,dx$ $\left[\frac{1}{3}\cos^3 x+\cos x+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\cos x-1}{\cos x+1}\right|+c\right]$

15. $\int \sin^3 x\cos^2 x\,dx$ $\left[-\frac{\cos^3 x}{3}+\frac{\cos^5 x}{5}+c\right]$

16. $\int \frac{1}{5-4\sin x+3\cos x}\,dx$ $\left[\frac{1}{2-tg\frac{x}{2}}+c\right]$

17. $\displaystyle\int \frac{\cos x}{\sin^2 x + 6\sin x + 5}\,dx$ $\left[\dfrac{1}{4}\ln\left|\dfrac{\sin x + 1}{\sin x + 5}\right| + c\right]$

18. $\displaystyle\int \frac{\sin x}{\cos^2 x - 2\cos x + 1}\,dx$ $\left[\dfrac{1}{\cos x - 1} + c\right]$

19. $\displaystyle\int \frac{\sin^3 x}{2 + \cos x}\,dx$ $\left[\dfrac{\cos^2 x}{2} - 2\cos x + 3\ln|\cos x + 2| + c\right]$

20. $\displaystyle\int \frac{1}{2(\cos x + 2\sin x + 3)}\,dx$ $\left[\dfrac{1}{2}\,arctg\left(tg\dfrac{x}{2} + 1\right) + c\right]$

6. Integrovanie iracionálnych funkcií

1. $\int \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\,dx$ $\qquad \left[-x+4\sqrt{x}-4\ln\left|\sqrt{x}+1\right|+c\right]$

2. $\int \frac{\sqrt{x}}{x+4}\,dx$ $\qquad \left[2\sqrt{x}-4arctg\frac{\sqrt{x}}{2}+c\right]$

3. $\int x\sqrt[3]{x-1}\,dx$ $\qquad \left[\frac{3}{7}(x-1)^2\sqrt[3]{x-1}+\frac{3}{4}(x-1)\sqrt[3]{x-1}+c\right]$

4. $\int \frac{\sqrt{1-x}}{x}\,dx$ $\qquad \left[2\sqrt{1-x}-\ln\left|\frac{1+\sqrt{1-x}}{1-\sqrt{1-x}}\right|+c\right]$

5. $\int \frac{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}+\sqrt[3]{x}}{x+\sqrt[6]{x^7}}\,dx$ $\qquad \left[3\sqrt[3]{x}+12\sqrt[12]{x}-12arctg\sqrt[12]{x}+c\right]$

6. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}$ $\qquad \left[2\sqrt{x}-4\sqrt[4]{x}+4\ln\left|\sqrt[4]{x}+1\right|+c\right]$

7. $\int \frac{\sqrt[3]{x}}{x\left(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}\right)}\,dx$ $\qquad \left[6\ln\left|\frac{\sqrt[6]{x}}{\sqrt[6]{x}+1}\right|+c\right]$

8. $\int \frac{\sqrt[3]{3x+4}}{1+\sqrt[3]{3x+4}}\,dx$ $\qquad \left[\frac{3x+4}{3}-\frac{\sqrt[3]{(3x+4)^2}}{2}+\sqrt[3]{3x+4}-\ln\left|1+\sqrt[3]{3x+4}\right|+c\right]$

9. $\int \frac{1}{(1-x)^2}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,dx$ $\qquad \left[\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}+c\right]$

10. $\int \frac{x^2}{(5x+2)\sqrt{5x+2}}\,dx$ $\qquad \left[\frac{2}{125}\sqrt{5x+2}\left(\frac{1}{3}(5x+2)-4-\frac{4}{5x+2}\right)+c\right]$

11. $\int \frac{1}{\sqrt{5-2x-3x^2}}\,dx$ $\qquad \left[\frac{1}{\sqrt{3}}\arcsin\frac{3x+1}{4}+c\right]$

12. $\int \frac{1}{\sqrt{2x^2-4x+1}}\,dx$ $\qquad \left[\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|(x-1)+\sqrt{x^2-2x+\frac{1}{2}}\right|+c\right]$

13 $\int \frac{1}{\sqrt{8-6x-9x^2}}\,dx$ $\qquad \left[\frac{1}{3}\arcsin\left(x+\frac{1}{3}\right)+c\right]$

14. $\int \frac{x^5}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$ $\qquad \left[\left(\frac{1}{5}x^4-\frac{4}{15}x^2+\frac{8}{15}\right)\sqrt{1+x^2}+c\right]$

15. $\int \frac{x^2+8}{\sqrt{x^2 4x+1}}\,dx$ $\qquad \left[\left(\frac{1}{2}x+3\right)\sqrt{x^2-4x+1}+\frac{27}{2}\ln\left|x-2+\sqrt{x^2-4x+1}\right|+c\right]$

16. $\int \frac{x+3}{\sqrt{x^2+2x}}\,dx$ $\qquad \left[\sqrt{x^2+1}+2\ln\left|x+1+\sqrt{x^2+2x}\right|+c\right]$

17. $\int \sqrt{3-2x-x^2}\,dx$ $\qquad \left[\frac{x+1}{2}\sqrt{3-2x-x^2}+2\arcsin\frac{x-1}{2}+c\right]$

18. $\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2+1}}\,dx$ $\qquad \left[\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}+c\right]$

7. Integrovanie niektorých transcendentných funkcií

1. $\int \frac{e^{3x}+e^{x}}{e^{4x}+2e^{2x}+1}\,dx$ $\left[arctg\left(e^{x}\right)+c\right]$

2. $\int (ln^3\,x-2\,ln\,x+3)\,dx$ $\left[x\left(\ln_3 x-3\ln^2 x+4\ln x-1\right)+c\right]$

3. $\int \frac{e^{2x}-e^{x}}{e^{2x}+1}\,dx$ $\left[\frac{1}{2}\ln\left(e^{2x}+1\right)-arctg\,e^{x}+c\right]$

4. $\int \frac{2e^{3x}+3e^{x}}{e^{2x}+1}\,dx$ $\left[2e^{x}+arctg\,e^{x}+c\right]$

5. $\int \frac{e^{x}-2}{e^{2x}+4}\,dx$ $\left[-\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\ln\left(e^{2x}+4\right)+\frac{1}{2}arctg\frac{e^{x}}{2}+c\right]$

6. $\int x^3\,ln^3\,x\,dx$ $\left[\frac{x^4}{4}\ln^3 x-\frac{3}{16}x^4\ln^2 x+\frac{3}{32}x^4\ln x-\frac{3}{128}x^4+c\right]$

7. $\int (ln^3\,x+ln\,x)\,dx$ $\left[\left(\ln^3 x-3\ln^2 x+7\ln x-7\right)x+c\right]$

8. $\int x\arcsin x\,dx$ $\left[\frac{2x^2-1}{4}\arcsin x+\frac{x\sqrt{1-x^2}}{4}+c\right]$

9. $\int \frac{\ln x}{x\left(1-\ln^2 x\right)}\,dx$ $\left[\ln\frac{1}{\sqrt{1-\ln^2 x}}+c\right]$

10. $\int \frac{e^{4x}}{e^{8x}+4}\,dx$ $\left[\frac{1}{8}arctg\frac{e^{4x}}{2}+c\right]$

11. $\int \frac{arctg(x)}{x^4}\,dx$ $\left[\frac{1}{6}\ln\frac{1+x^2}{x}-\frac{arctgx}{3x^3}-\frac{1}{6x^2}+c\right]$

12. $\int \frac{\arcsin x}{x^2}\,dx$ $\left[\ln\left|\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}\right|-\frac{1}{x}\arcsin x+c\right]$

13. $\int x^3 arccotg\ x\ dx$ $\left[\frac{x^4}{4}arccotg(x)+\frac{1}{4}\left(\frac{x^3}{3}-x-arccotg(x)\right)+c\right]$

14. $\int \frac{1}{a^{x}+1}\,dx$ $\left[\frac{1}{\ln a}\ln\frac{a^{x}}{a^{x}+1}+c\right]$

15. $\int \sqrt{1-\sqrt{x}}\,dx$ $\left[\frac{4}{5}\sqrt{\left(1-\sqrt{x}\right)^5}-\frac{4}{3}\sqrt{\left(1-\sqrt{x}\right)^3}+c\right]$

16. $\int \frac{\sqrt{\arccos x}}{1-x^2}\,dx$ $\left[-\frac{2}{3}\sqrt{(\arccos)^3}+c\right]$

17. $\int \frac{1}{e^{\arcsin x}\sqrt{1-x^2}}\,dx$ $\left[-\frac{1}{e^{\arcsin x}}+c\right]$

18. $\int \frac{5}{2^{x}-1}\,dx$ $\left[\frac{5}{\ln 2}\ln\left|\frac{2^{x}-1}{2^{x}}\right|+c\right]$

19. $\int \frac{3^{x}}{3^{x}+2}\,dx$ $\left[x+\frac{1}{\ln 3}\ln\frac{3^{x}+2}{3^{x}}+c\right]$

20. $\int (ln^2\,x+2\,ln\,x)\,dx$ $\left[x\left(\ln^2 x+2\ln x-2\right)+c\right]$

8. Nevlastný integrál na neohraničenom intervale

1. $\int_3^\infty \frac{\ln^2 x}{x} dx$ [*diverguje*]

2. $\int_1^\infty \frac{x}{(x^2+5)^3} dx$ $\left[\frac{1}{144}\right]$

3. $\int_2^\infty x \ln x \, dx$ [*diverguje*]

4. $\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{25+x^2}$ $\left[\frac{\pi}{10}\right]$

5. $\int_{-\infty}^0 x e^x dx$ $[-1]$

6. $\int_{-1}^\infty e^{-3x} dx$ $\left[\frac{e^3}{3}\right]$

7. $\int_1^\infty \frac{1}{x^2+x} dx$ $[\ln 2]$

8. $\int_{-\infty}^0 2^{5x} dx$ $\left[\frac{1}{5\ln 2}\right]$

9. $\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{1+x^2} dx$ $[\pi]$

10. $\int_1^\infty \frac{2x+1}{x^2(x+1)} dx$ $[1+\ln 2]$

11. $\int_0^\infty (3x-2)e^{-x} dx$ $[1]$

12. $\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{x^2+2x+2} dx$ $[\pi]$

13. $\int_{\frac{3}{\pi}}^\infty \frac{1}{x^2} cos\frac{1}{x} \, dx$ $\left[\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$

14. $\int_3^\infty \frac{1}{x^2+9} dx$ $\left[\frac{\pi}{12}\right]$

15. $\int_0^\infty \frac{1}{(x+5)^2} dx$ $\left[\frac{1}{5}\right]$

16. $\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x^2+8x+15}} dx$ [*diverguje*]

17. $\int_1^\infty x^{-2} dx$ $[1]$

18. $\int_{-\infty}^{-4} \frac{1}{x^2-1} dx$ $\left[\frac{1}{2}\ln\left|\frac{3}{5}\right|\right]$

19. $\int_0^\infty \frac{arccotg\, x}{1+x^2} dx$ $\left[\frac{\pi^2}{8}\right]$

20. $\int_{-\infty}^\infty \frac{x}{\sqrt{x^2+5}} \, dx$ [*diverguje*]

9. Neurčitý integrál z neohraničenej funkcie

1. $\int_{-\frac{9}{2}}^{0} \frac{1}{\sqrt{2x+9}}\,dx$ $[3]$

2. $\int_0^1 \frac{1}{(2-x)\sqrt{1-x}}\,dx$ $\left[\frac{\pi}{2}\right]$

3. $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}$ $[6]$

4. $\int_0^1 x\ln x\,dx$ $\left[-\frac{1}{4}\right]$

5. $\int_0^3 \frac{1}{\sqrt{3-x}}\,dx$ $\left[2\sqrt{3}\right]$

6. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} tgx\,dx$ $[diverguje]$

7. $\int_{\frac{3}{2}}^{5} \frac{1}{\sqrt{2x-3}}\,dx$ $\left[\sqrt{7}\right]$

8. $\int_0^{\infty} \frac{dx}{x}$ $[diverguje]$

9. $\int_0^9 \frac{1}{\sqrt[4]{(9-x)^3}}\,dx$ $\left[4\sqrt[4]{9}\right]$

10. $\int_0^2 \frac{x^2}{\sqrt{8-x^3}}\,dx$ $\left[\frac{4\sqrt{2}}{3}\right]$

11. $\int_{-1}^{1} x^{-2}\,dx$ $[diverguje]$

12. $\int_1^e \frac{dx}{x\ln^3 x}$ $[diverguje]$

13. $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ $[2]$

14. $\int_0^4 \frac{dx}{(x-2)^2}$ $[diverguje]$

15. $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ $\left[\frac{\pi}{2}\right]$

16. $\int_0^1 x\ln x\,dx$ $\left[-\frac{1}{4}\right]$

17. $\int_0^{2\pi} \frac{1}{1+\sin x}\,dx$ $[-4]$

18. $\int_0^e \frac{\ln^3 x}{x}\,dx$ $[diverguje]$

19. $\int_1^2 \frac{x}{\sqrt{x-1}}\,dx$ $\left[\frac{8}{3}\right]$

20. $\int_0^1 \frac{1}{x\ln^2 x}\,dx$ $[1]$

10. Určitý integrál

1. $\int_1^2 (x^2 - 2x + 3)\, dx$ $\left[\frac{7}{3}\right]$

2. $\int_1^4 \frac{1+\sqrt{x}}{x^2}\, dx$ $\left[\frac{7}{4}\right]$

3. $\int_{-1}^{1} \frac{2x-1}{x-2}\, dx$ $[4 - 3\ln 3]$

4. $\int_1^2 e^x \left(2 + \frac{e^{-x}}{x^2}\right) dx$ $\left[2e^2 - 2e + \frac{1}{2}\right]$

5. $\int_{-1}^{0} (4x-3)^2\, dx$ $\left[\frac{79}{3}\right]$

6. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} cotgx\, dx$ $[0]$

7. $\int_1^2 \left(\sqrt{x} + 2\right)^2 dx$ $\left[\frac{17}{6} + \frac{36}{3}\sqrt{2}\right]$

8. $\int_0^1 \frac{x^2 + 3x}{(x+1)(x^2+1)}\, dx$ $\left[\frac{\pi}{4}\right]$

9. $\int_1^4 \left(\sqrt{x^3} - \frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt{2}\right) dx$ $\left[\frac{32}{5} + 3\sqrt{2}\right]$

10. $\int_0^5 \frac{2}{x^2 + 25}\, dx$ $\left[\frac{\pi}{10}\right]$

11. $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{4 - x^2}}\, dx$ $\left[\frac{\pi}{6}\right]$

12. $\int_{-4}^{4} \frac{1}{\sqrt{x^2 + 9}}\, dx$ $[2\ln 3]$

13. $\int_0^1 \frac{e^x}{e^x + e}\, dx$ $\left[\ln \frac{2e}{1+e}\right]$

14. $\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{2 + \cos x}\, dx$ $[\ln 3]$

15. $\int_{-1}^{0} \frac{e^{2x} - 1}{e^x}\, dx$ $\left[2 - \frac{1}{e} - e\right]$

16. $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}\, dx$ $\left[\ln\left(1 + \sqrt{2}\right)\right]$

17. $\int_0^{\frac{\pi}{3}} tgx\, dx$ $[\ln 2]$

18. $\int_0^1 \frac{x-3}{x^2+1}\, dx$ $\left[\frac{1}{2}\ln 2 - 3\frac{\pi}{4}\right]$

19. $\int_1^e \frac{x^2 + 2x + 2}{x}\, dx$ $\left[\frac{e^2 + 4e - 1}{2}\right]$

20. $\int_{-4}^{4} e^{\frac{x}{4}}\, dx$ $\left[4\left(e - e^{-1}\right)\right]$

11. Určitý integrál - substitučná metóda

1. $\int_0^8 \sqrt{1+x}\,dx$ $\left[\frac{52}{3}\right]$

2. $\int_1^5 \frac{\sqrt{x-1}}{x}\,dx$ $\left[4-2arctg2\right]$

3. $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{4+x^2}}\,dx$ $\left[\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$

4. $\int_e^{e^2} \frac{1}{x\ln x}\,dx$ $\left[\ln 2\right]$

5. $\int_{-2}^{2} \sqrt{9+4x}\,dx$ $\left[\frac{1}{6}\left(17\sqrt{17}-1\right)\right]$

6. $\int_1^{e^2} \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x}\,dx$ $\left[2\sqrt{3}-\frac{2}{3}\right]$

7. $\int_4^{25} \frac{1}{\sqrt{x}-1}\,dx$ $\left[2(3+\ln 4)\right]$

8. $\int_e^{e^4} \frac{\ln x-3}{x\sqrt{\ln x}}\,dx$ $\left[-\frac{4}{3}\right]$

9. $\int_0^2 \frac{1}{\sqrt[3]{3x+1}}\,dx$ $\left[\frac{1}{2}\left(\sqrt[3]{49}-1\right)\right]$

10. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos^2 x\,dx$ $\left[\frac{1}{3}\right]$

11. $\int_0^4 \frac{1}{1+\sqrt{2x+1}}\,dx$ $\left[2-\ln 2\right]$

12. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\sin x}\cos x\,dx$ $\left[e-1\right]$

13. $\int_0^1 \frac{x}{x^4+1}\,dx$ $\left[\frac{\pi}{8}\right]$

14. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{(2+\sin x)^2}\,dx$ $\left[\frac{2}{3}\right]$

15. $\int_4^9 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}\,dx$ $\left[7+2\ln 2\right]$

16. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x\,dx}{6-5\cos x+\cos^2 x}$ $\left[\ln\frac{4}{3}\right]$

17. $\int_0^3 \frac{2x-1}{\sqrt{x+1}}\,dx$ $\left[\frac{10}{3}\right]$

18. $\int_1^3 \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}\,dx$ $\left[e-\sqrt[3]{e}\right]$

19. $\int_0^1 e^x\sqrt{1+e^x}\,dx$ $\left[\frac{2}{3}\sqrt{(1+e)^3}-2\sqrt{2}\right]$

20. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx$ $\left[\frac{\pi}{4}\right]$

12. Určitý integrál – metóda per – partes

1. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x \, dx$ $[1]$

2. $\int_1^{e^2} \sqrt{x} \ln x \, dx$ $\left[\frac{8e^3+4}{9}\right]$

3. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x \, dx$ $\left[\frac{\pi}{2}-1\right]$

4. $\int_{-1}^{1} \arccos x \, dx$ $[\pi]$

5. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{x}{2}-1\right) \cos x \, dx$ $\left[\frac{\pi-6}{4}\right]$

6. $\int_0^{1} (x+1) e^{2x} \, dx$ $\left[\frac{3e^2-1}{4}\right]$

7. $\int_0^{1} x e^{-x} \, dx$ $\left[1-\frac{2}{e}\right]$

8. $\int_1^{e} x^2 \ln^2 x \, dx$ $\left[\frac{5e^3-2}{27}\right]$

9. $\int_1^{e} x \ln x \, dx$ $\left[\frac{e^2+1}{4}\right]$

10. $\int_0^{\pi} x^3 \sin x \, dx$ $[\pi^3-6\pi]$

11. $\int_0^{\pi} x^3 \sin x \, dx$ $[\pi^3-6\pi]$

12. $\int_0^{\pi} e^x \sin x \, dx$ $\left[\frac{e^\pi+1}{2}\right]$

13. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos 2x \, dx$ $\left[\frac{\pi^2-8}{32}\right]$

14. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x} \cos x \, dx$ $\left[\frac{e^\pi-2}{5}\right]$

15. $\int_0^{1} x^2 e^x \, dx$ $[e-2]$

16. $\int_0^{2} (3-2x) e^{\frac{x}{2}} \, dx$ $[6e-14]$

17. $\int_0^{1} arctgx \, dx$ $\left[\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\ln 2\right]$

18. $\int_0^{\pi} x \sin \frac{x}{2} \, dx$ $[4]$

19. $\int_1^{e} \ln^2 x \, dx$ $[e-2]$

20. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left(4x-\frac{1}{2}\right) \sin 4x \, dx$ $\left[\frac{\pi}{4}\right]$

13. Plošný obsah rovinných útvarov

Vypočítajte obsah časti roviny ohraničenej krivkami.

1. $y = x,\ y = \frac{x}{2},\ x = 4$ $[4]$

2. $y = e^x,\ y = e^{-x},\ y = e^2$ $\left[2\left(e^2+1\right)\right]$

3. $y = 4 - x^2,\ y = 0$ $\left[\frac{32}{3}\right]$

4. $y^2 = x,\ xy = 1,\ y = 2,\ x = 0$ $\left[\frac{1}{3} + \ln 2\right]$

5. $y = 3,\ y = 7 - x,\ x = 1$ $\left[\frac{9}{2}\right]$

6. $y = \frac{4}{x},\ y = 4x,\ y = x$ $[8 \ln 2]$

7. $y = x^2 + 2x - 3,\ y = 0$ $\left[\frac{32}{3}\right]$

8. $xy = 6,\ x + y - 7 = 0$ $\left[\frac{35}{2} - 6 \ln 6\right]$

9. $y = x^2,\ y = 2 - x^2$ $\left[\frac{8}{3}\right]$

10. $y = x,\ xy = 1,\ x = 2$ $\left[\frac{3}{2} - \ln 2\right]$

11. $xy = 4,\ y = 0,\ x = 1,\ x = 4$ $[8 \ln 2]$

12. $y = 4 - x^2,\ y = 4 + x_2,\ x = 2$ $\left[\frac{16}{3}\right]$

13. $y = -x^2 + 4x + 5,\ y = 0$ $[36]$

14. $y = x^2,\ 4y = x^2,\ y = 4$ $\left[\frac{32}{3}\right]$

15. $y = x^2 + 2x,\ y = x + 2$ $\left[\frac{9}{2}\right]$

16. $y = 2 - x,\ y = x,\ y = 3$ $[4]$

17. $y = arctg\, x,\ y = \frac{\pi}{4},\ x = 0$ $\left[\frac{1}{2} \ln 2\right]$

18. $y = 4x^2 + 1,\ y = 2$ $\left[\frac{2}{3}\right]$

19. $y = 2^x + 1,\ y = 1,\ x = 0,\ x = 2$ $\left[\frac{3}{\ln 2}\right]$

20. $y = x^2 - 4x,\ y = 2x - 5$ $\left[\frac{32}{3}\right]$

21. $y = \sin x,\ x = 0,\ y = 1$ $\left[\frac{\pi}{2} - 1\right]$

22. $y - x^2 + 9 = 0,\ 5x + y + 9 = 0$ $\left[\frac{125}{6}\right]$

23. $t = e^{2x},\ y = 1 - x,\ x = 1$ $\left[\frac{1}{2}e^2 - 1\right]$

24. $4y = x^2,\ y^2 = 4x$ $\left[\frac{16}{3}\right]$

25. $y = \ln x,\ y = 0,\ x = e$ $[1]$

26. $y = \ln x,\ y = \ln^2 x$ $[3 - e]$

14. Dĺžka oblúka rovinnej krivky

Vypočítajte dĺžku oblúka rovinnej krivky:

1. $y = 2x + 2 \quad x \in \langle 1,2 \rangle$ $\quad \left[\sqrt{5}\right]$

2. $y = \frac{2}{3}\sqrt{x^3}, \quad x \in \langle 3,8 \rangle$ $\quad \left[\frac{38}{3}\right]$

3. $y = x - 5 \quad x \in \langle 1,3 \rangle$ $\quad \left[2\sqrt{2}\right]$

4. $y = \frac{2x^2}{\sqrt{x}}, \; x \in \langle 1,7 \rangle$ $\quad \left[\frac{2}{27}\left(512 - 10\sqrt{10}\right)\right]$

5. $y = 2x - x^2$, medzi priesečníkmi s osou x $\quad \left[\sqrt{5} + \frac{1}{4}\ln\left|\frac{\sqrt{5}+2}{\sqrt{5}-2}\right|\right]$

6. $y = \sqrt{1 - x^2} + \arcsin x, \; x \in \left\langle 0, \frac{1}{2} \right\rangle$ $\quad \left[2\left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right)\right]$

7. $y = \ln x, \quad x \in \left\langle \sqrt{3}, \sqrt{8} \right\rangle$ $\quad \left[1 + \frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}\right]$

8. $y = \ln \sin x, \; x \in \left\langle \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3} \right\rangle$ $\quad \left[\ln 3\right]$

9. $y = x\sqrt{x}, \; x \in \langle 0,4 \rangle$ $\quad \left[\frac{8}{27}\left(10\sqrt{10} - 1\right)\right]$

10. $y = \frac{x^2}{4} - \frac{\ln x}{2}, \; x \in \langle 1,4 \rangle$ $\quad \left[\frac{15}{4} + \ln 2\right]$

11. $y = \ln\left(1 - x^2\right), \; x \in \left\langle 0, \frac{1}{2} \right\rangle$ $\quad \left[\ln 3 - \frac{1}{2}\right]$

12. $y = \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right), \; x \in \langle 0,3 \rangle$ $\quad \left[\frac{e^3 + e^{-3}}{2}\right]$

13. $y = \frac{x^2}{2} + x - 1, \; x \in \langle 0,1 \rangle$ $\quad \left[\sqrt{5} - \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{2+\sqrt{5}}{1+\sqrt{2}}\right|\right]$

14. $y = \frac{x^2}{2} - 1$, medzi priesečníkmi s osou x $\quad \left[\sqrt{6} + \ln\left(\sqrt{3} + \sqrt{2}\right)\right]$

15. $y = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}\ln, \; x \in \langle 1,4 \rangle$ $\quad \left[\frac{15}{4} + \ln 2\right]$

16. $y = \frac{2 + x^6}{8x^2}, \; x \in \langle 1,2 \rangle$ $\quad \left[\frac{33}{16}\right]$

17. $y = \sqrt{9 - x^2}, \; x \in \left\langle 0, \frac{3}{2} \right\rangle$ $\quad \left[\frac{\pi}{2}\right]$

18. $y = \ln\frac{e^x + 1}{e^x - 1}, \; x \in \langle 1,2 \rangle$ $\quad \left[\ln\frac{e^2 + 1}{e}\right]$

19. $y = \sqrt{4 - x^2}, \; x \in \langle 0,1 \rangle$ $\quad \left[\frac{\pi}{3}\right]$

20. $y = 4 - 5x, \; x \in \left\langle 0, \frac{4}{5} \right\rangle$ $\quad \left[\sqrt{26}\,\frac{4}{5}\right]$

15. Objem rotačného telesa

Vypočítajte objem rotačného telesa, ktoré vznikne rotáciou elementárnej oblasti ohraničenej danými krivkami okolo osi x:

1. $y = 5x - x^2 - 6,\ y = 0$ $\left[\dfrac{\pi}{30}\right]$
2. $y = x^2,\ 2x + y - 3 = 0$ $\left[\dfrac{1088}{15}\pi\right]$
3. $y = x,\ y = 3x,\ x = 2$ $\left[\dfrac{64}{3}\pi\right]$
4. $y = -x^2 + 3x,\ y = 1 + x,\ x = 0$ $\left[\dfrac{19}{30}\pi\right]$
5. $y = x^2,\ y = 1$ $\left[\dfrac{16}{5}\pi\right]$
6. $y = x + 5,\ y + x = 1,\ y - 1 = 0$ $\left[\dfrac{40}{3}\pi\right]$
7. $2y = x^2,\ 2x + 2y - 3 = 0$ $\left[\dfrac{272}{15}\pi\right]$
8. $y = \dfrac{x}{2},\ y + x = 0,\ y - 2 = 0$ $[16\pi]$
9. $y = x^2 + 2,\ y = 2x^2 + 1$ $\left[\dfrac{24}{5}\pi\right]$
10. $xy = 1,\ y = x,\ x = 2$ $\left[\dfrac{11}{6}\pi\right]$
11. $y^2 = 4x,\ y = 4$ $\left[\dfrac{32}{3}\pi\right]$
12. $y = \sqrt{x},\ xy = 1,\ x = 4$ $\left[\dfrac{27}{4}\pi\right]$
13. $y = \dfrac{1}{4},\ y = 2,\ x = 2$ $\left[\dfrac{9}{2}\pi\right]$
14. $y = x^{-2},\ y = 0,\ x = 1,\ x = 2$ $\left[\dfrac{7}{24}\pi\right]$
15. $y^2 = x,\ y = x^2$ $\left[\dfrac{3}{10}\pi\right]$
16. $y - \ln x,\ x = e,\ y = 0$ $[\pi(e-2)]$
17. $y = \sin x,\ y = 0,\ 0 \le x \le \pi$ $\left[\dfrac{1}{2}\pi^2\right]$
18. $y = e^x,\ x = 1,\ x = 4,\ y = 0$ $\left[\dfrac{\pi}{2}\left(e^8 - e^2\right)\right]$
19. $y = 1 - x^2,\ y = 1 + x^2\ x = 1$ $\left[\dfrac{4}{3}\pi\right]$
20. $y = x^3,\ y = \sqrt{x}$ $\left[\dfrac{5}{14}\pi\right]$
21. $y = x^2 + 2,\ y = 5$ $\left[\dfrac{152\sqrt{3}}{5}\pi\right]$
22. $y = e^x,\ y = e^2,\ x = 0$ $\dfrac{\pi}{30}\left[\dfrac{\pi}{2}\left(3e^4 + 1\right)\right]$

16. Obsah rotačnej plochy

Vypočítajte obsah plochy, ktorá vznikne rotáciou danej krivky okolo osi x:

1. $y = x - 4,\ x \in \langle 4,8 \rangle$ $\left[16\sqrt{2}\pi\right]$

2. $y = 2x - 6,\ x \in \langle 4,7 \rangle$ $\left[30\sqrt{5}\pi\right]$

3. $y = e^x,\ x \in \langle 0,1 \rangle$ $\left[\pi\left(e\sqrt{e^2+1} - \sqrt{2} + \ln\frac{e+\sqrt{e^2+1}}{1+\sqrt{2}}\right)\right]$

4. $y = e^{-x},\ x \in \langle 0,1 \rangle$ $\left[\pi\left(\sqrt{2} - \frac{\sqrt{e^2+1}}{e^2} + \ln\frac{e\left(1+\sqrt{2}\right)}{1+\sqrt{e^2+1}}\right)\right]$

5. $y = \frac{x^3}{3},\ x \in \langle 0,2 \rangle$ $\left[\frac{\pi}{9}\left(17\sqrt{17} - 1\right)\right]$

6. $y = \frac{x^3}{3},\ x \in \langle -1,1 \rangle$ $\left[\frac{2\pi}{9}\left(2\sqrt{2} - 1\right)\right]$

7. $y = \sin x,\ x \in \langle 0,\pi \rangle$ $\left[2\pi\left(\sqrt{2} + \ln\left(1+\sqrt{2}\right)\right)\right]$

8. $y = \cos x,\ x \in \left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle$ $\left[2\pi\left(\sqrt{2} + \ln\left(1+\sqrt{2}\right)\right)\right]$

9. $y^2 = 8x,\ x \in \langle 2,23 \rangle$ $\left[312\sqrt{2}\pi\right]$

10. $y^2 = 2x,\ x \in \left\langle 0, \frac{3}{2} \right\rangle$ $\left[\frac{14}{3}\pi\right]$

11. Vypočítajte obsah plochy, ktorá vznikne rotáciou krivky $y^2 = 9 + x$ medzi jej priesečníkmi s priamkou

    a) $y = x + 9$ $\left[\frac{\pi}{6}\left(5\sqrt{5} - 1\right)\right]$

    b) $x = 0$ $\left[\frac{\pi}{6}\left(37\sqrt{37} - 1\right)\right]$

    c) $x = 3$ $\left[57\pi\right]$

12. Vypočítajte obsah plochy, ktorá vznikne rotáciou krivky $y^2 = 9 - x$ medzi jej priesečníkmi s priamkou $x = -1$ $\left[\frac{41\sqrt{41} - 1}{6}\pi\right]$

ODR. 1. rádu – separovateľné

Riešte nasledujúce DR metódou separácie premenných

1. $2y'\sqrt{x} = y$ $\left[y = ce^{\sqrt{x}}\right]$

2. $y'\sqrt{1-x^2} - y^2 - 1 = 0$ $\left[arctg\, y = \arcsin x + c\right]$

3. $\left(1+y^2\right)dx + xy\,dy = 0$ $\left[x^2\left(1+y^2\right) = c\right]$

4. $e^y\left(1+x^2\right)dy - 2x\left(1+e^y\right)dx = 0$ $\left[1+e^y = c\left(1+x^2\right)\right]$

5. $\left(xy^2 + x\right)dx + \left(y - x^2y\right)dy = 0$ $\left[1+y^2 = c\left(1-x^2\right)\right]$

7. $x\sqrt{1+y^2} + yy'\sqrt{1+x^2} = 0$ $\left[\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+y^2} = c\right]$

8. $e^x \sin^3 y + \left(1+e^{2x}\right)\cos y . y' = 0$ $\left[arctg\, e^x - \frac{1}{2\sin^2 y} = c\right]$

9. $\left(x^2 + x\right)y' - 2y - 1 = 0$ $\left[y = \frac{cx^2}{2(1+x)^2} - \frac{1}{2}\right]$

10. $xy' = (1+y^2)\ arctg(y)$ $\left[y = tg(cx)\right]$

11. $y' = \frac{1-2x}{y^2}$ $\left[y^3 = 3x - 3x^2 + c\right]$

12. $2y - x^3y' = 0$ $\left[y = ce^{-\frac{1}{x^2}}\right]$

13. $xyy' = 1 - x^2$ $\left[x^2 + y^2 = \ln cx^2\right]$

14. $y - y^2 + xy' = 0$ $\left[y = \frac{1}{1-cx}\right]$

15. $\cos\sqrt{x}dx - \sqrt{x}dy = 0$ $\left[y = 2\sin\sqrt{x} + c\right]$

16. $y' = 5^{x+y}$ $\left[5^x + 5^{-y} = c\right]$

17. $1 + y^2 + xyy' = 0$ $\left[x^2\left(1+y^2\right) = c\right]$

Nájdite partikulárne riešenie rovnice, ktoré spĺňa danú začiatočnú podmienku

1.$(1+y^2)\,dx - xy\,dy = 0, \quad y(1)=0$ $\left[x^2 - y_2 = 1\right]$

2. $y'\sin x - y\cos x = 0, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$ $\left[y = \sin x\right]$

3. $y\ln y\,dx + x\,dy = 0, \quad y(1)=1$ $\left[y=1\right]$

4. $(1+e^x)yy' = e^x, \quad y(0)=1$ $\left[2e^{\frac{y^2}{2}} = \sqrt{e}(1+e^x)\right]$

5. $\frac{x}{1+y} - \frac{yy'}{1+x} = 0, \quad y(0)=1$ $\left[3x^2+2x^3-3y^2-2y^3+5=0\right]$

6. $\frac{1+y^2}{1+x^2} - y' = 0$ $\left[y = tg\left(\frac{\pi}{4} - arctgx\right)\right]$

7. $y'\sqrt{1-x^2} = xy, \quad y(0)=\frac{1}{e}$ $\left[y = e^{-\sqrt{1-x^2}}\right]$

8. $\frac{1}{2y+1}dy - cotgx\,dx = 0, \quad y\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}$ $\left[y = 2\sin^2 x - \frac{1}{2}\right]$

9. $y'\sin y\cos x = \cos y\sin x, \quad y(0)=\frac{\pi}{4}$ $\left[\cos x = \sqrt{2}\cos y\right]$

10. $y'\sin x = y\ln y, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$ $\left[y=1\right]$

18. ODR. 1. rádu – homogénna diferenciálna rovnica

Riešte homogénne diferenciálne rovnice.

1. $xy' = x + y$ $\left[y = x\ln|x| + cx\right]$

2. $xy' - y = xe^{\frac{y}{x}}$ $\left[e^{-\frac{y}{x}} = -\ln cx\right]$

3. $y' = \dfrac{x^2 + y^2}{xy}$ $\left[y^2 = 2x^2\ln|x| + 2cx^2\right]$

4. $xy' = y\ln\dfrac{y}{x}$ $\left[y = xe^{cx+1}\right]$

5. $xy' = y + \sqrt{x^2 + y^2}$ $\left[\dfrac{y}{x} + \sqrt{1 + \dfrac{y^2}{x^2}} = cx\right]$

6. $y' = \dfrac{y^2}{x^2} - 2$ $\left[y - 2x = cx^2(y + x)\right]$

7. $xy' = y + x\cos^2\dfrac{y}{x}$ $\left[tg\dfrac{y}{x} = \ln cx\right]$

8. $y' - \frac{y}{x} = tg\frac{y}{x}$ $\left[\sin\dfrac{y}{x} = cx\right]$

9. $(x - y)dx + xdy = 0$ $\left[y = x(c - \ln|x|)\right]$

10. $x^3y' = y(y^2 + x^2)$ $\left[c = x^2e^{\frac{x^2}{y^2}}\right]$

11. $xy' - y = xe^{\frac{y}{x}}$ $\left[\ln cx = -e^{-\frac{y}{x}}\right]$

12. $x^2 + y^2 = 2xyy'$ $\left[y^2 = x(x - c)\right]$

13. $y' = \dfrac{x - y}{x - 2y}$ $\left[x^2 - 2xy + 2y^2 = c\right]$

14. $y' = \dfrac{2x + y}{x}$ $\left[y = 2x\ln|x| + cx\right]$

15. $y' = \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x}$ $\left[y^2 = 2x^2\ln cx\right]$

16. $xy' - y = \sqrt{x^2 + y^2}$ $\left[y + \sqrt{x^2 + y^2} = cx^2\right]$

Nájdite riešenie homogénnej diferenciálnej rovnice so začiatočnou podmienkou:

1. $y' = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$, $y(0) = 1$ $\left[2y^2\ln y - x^2 = 0\right]$

2. $y + \sqrt{x^2 + y^2} - xy' = 0$, $y(1) = 0$ $\left[y = \dfrac{x^2 - 1}{2}\right]$

3. $(xy' - y)\, arctg\frac{y}{x} = x,\ y(1) = 0$ $\left[e^{\frac{y}{x}arctg\frac{y}{x}} = \sqrt{x^2 + y^2}\right]$

4. $x^2 + 2xy - y^2 = (x^2 - 2xy - y^2)y'$, $y(2) = 2$ $\left[y = 1 + \sqrt{1 + 2x - x^2}\right]$

5. $x + 2y - xy' = 0$, $y(2) = 2$ $\left[y = x^2 - x\right]$

6. $(y^2 - x^2)y' + xy = 0$, $y(1) = 1$ $\left[\dfrac{x^2}{y^2} = 1 - 2\ln|y|\right]$

19. Lineárna diferenciálna rovnica (LDR) prvého rádu

Riešte LDR

1. $y' + 2y = e^{-x}$ $\left[y = ce^{-2x} + e^{-x}\right]$

2. $xy' - 2y = x + 1$ $\left[y = -x - \frac{1}{2} + cx^2\right]$

3. $y' - \frac{3y}{x} = x$ $\left[y = cx^3 - x^2\right]$

4. $y' + \frac{2y}{x} = \frac{e^{-x^2}}{x}$ $\left[y = \frac{c - e^{-x^2}}{2x^2}\right]$

5. $y'\cos x - y\sin x = \sin 2x$ $\left[y = \frac{c - \cos x 2x}{\cos x}\right]$

6. $y' + x^2 y = x^2$ $\left[y = 1 + ce^{-\frac{x^3}{3}}\right]$

7. $y' - \frac{y}{x} = x$ $\left[y = cx + x^2\right]$

8. $y' - y\, tgx = 2\cos^2 x$ $\left[3y = 2\, tgx\,(3 - \sin^2 x) + \frac{c}{\cos x}\right]$

9. $xy' - 2y = xe^{-\frac{1}{x}}$ $\left[y = x^2\left(e^{-\frac{1}{x}} + c\right)\right]$

10. $y'\cos x + y\sin x = 1$ $\left[y = c\cos x + \sin x\right]$

11. $y' + y = 2x^2 - 2x + 1$ $\left[y = ce^{-x} + 2x^2 - 6x + 7\right]$

12. $y' + \frac{4xy}{x^2 + 1} = \frac{1}{\left(x^2 + 1\right)^3}$ $\left[y = \frac{c}{(x^2+1)^2} + \frac{arctg\, x}{(x^2+1)^2}\right]$

13. $(1 + x^2)y' + y = arctg\, x$ $\left[y = ce^{-actgx} + arctg\, x - 1\right]$

14. $xy' - 2y = x^3\cos x$ $\left[y = x^2\sin x + cx^2\right]$

15. $y' x\ln x - 2y = \ln x$ $\left[y = \ln(c\ln x - 1)\right]$

16. $y' + \frac{x}{x^2 + 1}y = \frac{\sin x}{\sqrt{x^2 + 1}}$ $\left[y = (c - \cos x)\sqrt{x^2 + 1}\right]$

Nájdite riešenie LDR 1.rádu, ktoré spĺňa začiatočnú podmienku.

1. $y' + 3y = x, \quad y\left(\frac{1}{3}\right) = 1$ $\left[y = e^{1-3x} + \frac{x}{3} - \frac{1}{9}\right]$

2. $xy' + y = 3x^2, \quad y(1) = 1$ $\left[y = x^2\right]$

3. $y' + \frac{3}{x}y = \frac{2}{x^3}, \quad y(1) = 1$ $\left[y = \frac{2}{x^2} - \frac{1}{x^3}\right]$

4. $y' - \frac{y}{2(x+1)} = e^x\sqrt{x+1}, \quad y(0) = 0$ $\left[y = \left(e^x - 1\right)\sqrt{x+1}\right]$

5. $y'\cos x - y\sin x, \quad y(0) = 0$ $\left[y = \frac{x^2}{\cos x}\right]$

6. $y' - y\,tg(x) = \frac{1}{cos^3 x}, \quad y(0) = 0$ $\left[y = \frac{\sin x}{\cos^2 x}\right]$

7. $y' + y\cos x = \cos x, \quad y(0) = 1$ $\left[y = 1\right]$

8. $y' + y\,cotgx = sin\,x\,, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ $\left[y = \frac{2x - \sin 2x + 4 - \pi}{4\sin x}\right]$

20. Bernoulliho diferenciálna rovnica

Riešte Bernoulliho diferenciálne rovnice:

1. $y' + 2xy = 2xy^2$ $\left[y = \dfrac{1}{1 + ce^{x^2}} \right]$

2. $y' + \dfrac{y}{x} = y^2 \ln x$ $\left[xy\left(\ln^2 x + c\right) + 2 = 0 \right]$

3. $2y' + y = \dfrac{x}{y}$ $\left[y = \sqrt{ce^{-x} + x - 1} \right]$

4. $y' + \dfrac{2}{x} y = x^4 y^2$ $\left[y = \dfrac{1}{-\dfrac{x^5}{3} + cx^2} \right]$

5. $y' + xy = xy^3$ $\left[y^2\left(ce^{x^2} + 1\right) = 1 \right]$

6. $y' + \dfrac{y}{2} = \dfrac{1}{2}(x - 1)y^3$ $\left[y^2\left(ce^{x} + x\right) = 1 \right]$

7. $y' 2\sin x + y\cos x = y^3 \sin^2 x$ $\left[y^2 (c - x)\sin x = 1 \right]$

Nájdite riešenie Bernoulliho diferenciálnej rovnice, ktoré spĺňa začiatočnú podmienku:

1. $y' + y = 2y^2, \quad y(0) = 2$ $\left[y = \dfrac{2}{4 - 3e^{x}} \right]$

2. $y' + \dfrac{y}{x} = y^2, \quad y(1) = 1$ $\left[y = \dfrac{1}{x(1 - \ln x)} \right]$

3. $2y' + \dfrac{x}{1 - x^2} y = \dfrac{x}{y}, \quad y(1) = 1$ $\left[y = \sqrt{2\sqrt{1 - x^2} + x^2 - 1} \right]$

21. Lineárne diferenciálne rovnice 2. rádu

Riešte lineárne diferenciálne rovnice 2. rádu bez pravej strany:

1. $y'' = 2x - e^x$ $\left[y = \dfrac{x^3}{3} - e^x + c_1 x + c_2 \right]$

2. $y'' = \dfrac{4}{x^2} - \cos x$ $\left[y = -4\ln|x| + \cos x + c_1 x + c_2 \right]$

3. $y'' = 8\sin 2x$ $\left[y = -2\sin 2x + c_1 x + c_2 \right]$

4. $y'' - 5y' = 0$ $\left[y = c_1 e^{5x} + c_2 \right]$

5. $y'' - 9y = 0$ $\left[y = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-3x} \right]$

6. $y'' + 3y' - 4y = 0$ $\left[y = c_1 e^{x} + c_2 e^{-4x} \right]$

7. $y'' + 6y' + 9y = 0$ $\left[y = c_1 e^{-3x} + c_2 x e^{-3x} \right]$

8. $y'' - 4y' + 13y = 0$ $\left[y = c_1 e^{2x} \cos 3x + c_2 e^{2x} \sin 3x \right]$

9. $y'' + 16y = 0$ $\left[y = c_1 \cos 4x + c_2 \sin 4x \right]$

10. $y'' + 2y' + 5y = 0$ $\left[y = c_1 e^{-x} \cos 2x + c_2 e^{-x} \sin 2x \right]$

11. $y'' - 6y' + 8y = 0$ $\left[y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{4x} \right]$

12. $y'' + 25y = 0$ $\left[y = c_1 \cos 5x + c_2 \sin 5x \right]$

13. $4y'' - 20y' + 25y = 0$ $\left[y = c_1 e^{\frac{5}{2}x} + c_2 x e^{\frac{5}{2}x} \right]$

14. $2y'' + 11y' - 6y = 0$ $\left[y = c_1 e^{-6x} + c_2 e^{\frac{1}{2}x} \right]$

15. $9y'' + 18y' + 13y = 0$ $\left[y = c_1 e^{-x} \cos\dfrac{2}{3}x + c_2 e^{-x} \sin\dfrac{2}{3}x \right]$

16. $y'' + y = 0$ $\left[y = c_1 \cos x + c_2 \sin x \right]$

17. $y'' - y' = 0$ $\left[y = c_1 + c_2 e^{x} \right]$

Nájdite riešenie danej diferenciálnej rovnice, ktoré vyhovuje začiatočnej podmienke:

1. $y'' - 6y' + 9y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 3$ $\left[y = e^{3x}\right]$

2. $y'' + y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$ $\left[y = \cos x + \sin x\right]$

3. $4y'' + y = 0, \quad y(\pi) = 2, \quad y'(\pi) = 3$ $\left[y = 2\sin\frac{x}{2} - 6\cos\frac{x}{2}\right]$

4. $y'' - y' = 0, \quad y(0) = -4, \ y'(0) = 5$ $\left[y = -9 + 5e^{x}\right]$

5. $y'' - 4y' + 3y = 0, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = 1$ $\left[y = 4e^{x} - e^{3x}\right]$

6. $y'' + y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 3$ $\left[y = \cos x + 3\sin x\right]$

22. LDR 2.rádu s pravou stranou

Nájdite riešenie LDR Lagrangeovou metódou variácie konštánt:

1. $y'' + y = \dfrac{1}{\sin x}$ $\left[y = (-x + c_1)\cos x + (\ln|\sin x| + c_2)\sin x\right]$

2. $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^x}{x}$ $[y = (-x + c_1)\, e^x + (ln|x| + c_2)\, xe^x]$

3. $y'' - 2y' + y = \dfrac{2e^x}{x^2 + 1}$ $[y = (c_1 - ln|x^2 + 1|)e^x + (2arctgx + c_2)xe^x]$

4. $y'' + 4y = \dfrac{1}{\sin 2x}$ $\left[y = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x + \dfrac{1}{4}\cos 2x \ln|\cos 2x| + \dfrac{1}{2}\sin 2x\right]$

5. $y'' - y' - 12y = 14e^x$ $\left[y = c_1 e^{4x} + c_2 e^{-3x} - \dfrac{7}{6}e^x\right]$

6. $y'' + 3y' + 2y = \dfrac{e^{-x}}{e^x + 1}$ $\left[y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-2x} - e^{-2x}\ln|e^x + 1| - e^{-x}\ln(1 + e^{-x})\right]$

7. $y'' + y = tg\, x$ $\left[y = c_1\, cos\, x + c_2\, sin\, x + \frac{1}{2} cos\, x\, ln\left|\frac{sin\, x + 1}{sin\, x - 1}\right|\right]$

8. $y'' - 2y' + y = e^x \ln x$ $\left[y = c_1 e^x + c_2 x e^x + e^e\left(\dfrac{3}{2}x^2 \ln x - \dfrac{5}{4}x^2\right)\right]$

9. $y'' + 4y' + 4y = \dfrac{e^{-2x}}{x}$ $\left[y = c_1 e^{-2x} + c_2 x e^{-2x} + x e^{-2x}(\ln x - 1)\right]$

10. $y'' - y' = \dfrac{e^x}{1 + e^x}$ $\left[y = c_1 + c_2 e^x - \ln|1 + e^x| + e^x(x - \ln|1 + e^x|)\right]$

Nájdite riešenie LDR so špeciálnou pravou stranou:

1. $y'' - y' - 2y = 4x$ $\quad\left[y = c_1e^{2x} + c_2e^{-x} - 2x + 1\right]$

2. $y'' + 2y' = e^{-x}$ $\quad\left[y = c_1 + c_2e^{-2x} - e^{-x}\right]$

3. $y'' - 5y' + 6y = 12x^2 - 2x + 1$ $\quad\left[y = c_1e^{2x} + c_2e^{3x} + 2x^2 + 3x + 2\right]$

4. $y'' - 5y' + 6y = 5e^{\frac{x}{2}}$ $\quad\left[y = c_1e^{2x} + c_2e^{3x} + \frac{4}{3}e^{\frac{x}{2}}\right]$

5. $y'' - y' - 15y = six - \cos x$ $\quad\left[y = c_1e^{4x} + c_2e^{-3x} + \frac{7\cos x - 6\sin x}{85}\right]$

6. $y'' + 6y' + 5y = 5x + 1$ $\quad\left[y = c_1e^{-x} + c_2e^{-5x} + x - 1\right]$

7. $y'' + 4y' = \sin x$ $\quad\left[y = c_1 + c_2e^{-4x} - \frac{1}{17}(4\cos x + \sin x)\right]$

8. $y'' + 4y = -5xe^{x}$ $\quad\left[y = c_1\cos 2x + c_2\sin 2x + e^{x}\frac{2 - 5x}{5}\right]$

9. $y'' - 2y' + 5y = 5x - 2$ $\quad\left[y = e^{x}(c_1\cos 2x + c_2\sin 2x) + x\right]$

10. $y'' + y = -x + \cos x + \sin x$ $\quad\left[y = c_1\cos x + c_2\sin x - x + \frac{x(\sin x - \cos x)}{2}\right]$

11. $y'' + y = x^3 - 1 - 2xe^{x}$ $\quad\left[y = c_1\cos x + c_2\sin x + x^3 - 6x - 1 - e^{x}(x - 1)\right]$

12. $y'' - 4y' + 5y = e^{2x} + 4\cos x$ $\quad\left[y = e^{2x}(c_1\cos x + c_2\sin x) + e^{2x} + \frac{\cos x - \sin x}{2}\right]$

13. $y'' - y' - 6y = 6x^2 + 8x - 7 + e^{2x}$ $\quad\left[y = c_1e^{3x} + c_2e^{-2x} - x^2 - x + 1 - \frac{e^{2x}}{4}\right]$

In [1]:
```
# Základné aritmetické operácie - základy programovania
# Programové kódy: SageMath v.9.x(Python 3.0)
# Prerekvizity: základy programovania
#
# Použitá literatúra:
# [1] R. E. Mezei, An introduction to SAGE programming, John Wiley,and Sons,2016
# ISBN: 978-1-119-12280-7.
#
# E-kurz: P. Szabó: Numerická matematika, 2022
# Spúšťanie programov:
#    1) Otvoriť lokalitu https://sagecell.sagemath.org/
#    2) Kopírovať obsah príkladu In[n] do SageMath boxu
#    3) Kliknutie na "Evaluate"
# Príloha publikácie:
# [4] Peter Szabó a Eva Baranová: Integrálny počet a numerická matematika, 2022, TUKE
# ISBN:978-80-553-4185-9
# Modifikované: 10.12.2022
```

In [2]:
```
# komentár, napíš "Hello world!"
print ("Hello World!")
```

```
Hello World!
```

In [3]:
```
# Verzia systému Sage Math
version()
```

Out[3]:
```
'SageMath version 9.1, Release Date: 2020-05-20'
```

In [4]:
```
# Základné aritmetické operácie
6+4, 6-4, 6*4, 6/4
```

Out[4]:
```
(10, 2, 24, 3/2)
```

In [5]:
```
# desatinné (racionálne) čísla
```

In [6]:
```
# operácia 4-tá mocnina - celé čísla
6**4
```

Out[6]:
```
1296
```

In [7]:
```
# operácia 4-tá mocnina
6^4
```

Out[7]:
```
1296
```

In [8]:
```
--4
```

Out[8]:
```
4
```

In [9]:
```
# Celočíselné delenie
6//4
```

Out[9]:
```
1
```

In [10]:
```
# Zvýšok po celočíselnom delení
6%4
```
Out[10]: 2

In [11]:
```
# Príklad: 2015 hodín je koľko dní ?

2015//24
```
Out[11]: 83

In [12]:
```
# Ak je teraz 19:00 hodín,
# koľko hodín bude o 2015 hodín?
(2015-5)%24
```
Out[12]: 18

In [13]:
```
# priorita operátorov +,-,*,/,^, ()
# plus, mínus, krát, deleno, umocnené na, zátvorky
6+4^2
```
Out[13]: 22

In [14]:
```
# priorita operátorov zátvorky
(6+4)^2
```
Out[14]: 100

In [15]:
```
# priorita operátorov 2
(((2-4)*(4-3)+4)^10)/(2^20)
```
Out[15]: 1/1024

In [16]:
```
# priorita operátorov 3
2+2*2-2 , 2+(2*2)-2 ,  (2+2)*2-2 , (2+2)*(2-2)
```
Out[16]: (4, 4, 6, 0)

In [17]:
```
# reálne čísla - čísla s pohyblivou čiarou
2.0^200
```
Out[17]: 1.60693804425899e60

In [18]:
```
# celé čísla
2^200
```
Out[18]: 1606938044258990275541962092341162602522202993782792835301376

In [19]:
```
# zlomky a desatinné čísla - racionálne čísla
6/4
```
Out[19]: 3/2

In [20]:
```
# zlomky a desatinné čísla - desatinné čísla
6/4.0
```
Out[20]: 1.50000000000000

In [21]:
```
# zlomky a desatinné čísla
6/4.n()
```
Out[21]:
```
1.50000000000000
```
In [22]:
```
# zlomky a desatinné čísla - 100 bitová presnosť
6/4.n(digits=5)
```
Out[22]:
```
1.5000
```
In [23]:
```
# zaokruhlenie čísel
round(1/4, 2), round(1/4, 5), round(1/4, 1)
```
Out[23]:
```
(0.25, 0.25, 0.2)
```
In [24]:
```
round(pi, 2), round(pi , 10)
```
Out[24]:
```
(3.14, 3.1415926536)
```
In [25]:
```
# konštanta pi-iracionálne číslo (nekonečne veľa čislic za des. bodkou)
pi.n(5), pi.n(digits=30)
```
Out[25]:
```
(3.1, 3.14159265358979323846264338328)
```
In [26]:
```
# konštanta e-iracionálne číslo (nekonečne veľa čislic za des. bodkou)
e.n(10), e.n(digits=40)
```
Out[26]:
```
(2.7, 2.718281828459045235360287471352662497757)
```
In [27]:
```
# konštanta golden_ratio - iracionálne číslo
golden_ratio.n(), golden_ratio.n(digits=30)
```
Out[27]:
```
(1.61803398874989, 1.61803398874989484820458683437)
```
In [28]:
```
# Nekonečno
infinity
```
Out[28]:
```
+Infinity
```
In [29]:
```
# Nekonečno (písmená oo)
```
In [30]:
```
# Dlhé riadky, zalomenie riadku opačná lomka \
(((2-4)*      \
(4-3)+        \
4)^10)/(2^20)
```
Out[30]:
```
1/1024
```
In [31]:
```
# reťazce a čísla - reťazce píšeme do úvodzoviek ""
print ("4+6")
```
```
4+6
```
In [32]:
```
# reťazce a čísla - čísla, premenné píšeme bez úvodzoviek ""
print (4+6)
```
```
10
```

In [33]:
```
# reťazce a čísla - príklad
print ("4+6 = ", 4+6)
```

```
4+6 =  10
```

In [34]:
```
# Knižnica zabudovaných funkcií
# druhá odmocnina sqrt

sqrt(72)
```

Out[34]:
```
6*sqrt(2)
```

In [35]:
```
# vyjadrenie pomocou desatinných číslic
# n(12) - presnosť na 100 bitov - sqrt(72) je iracionálne číslo
sqrt(72).n(100)
```

Out[35]:
```
8.4852813742385702928101323453
```

In [36]:
```
# testovanie či dané číslo je prvočíslo
(2^50-1).is_prime()
```

Out[36]:
```
False
```

In [37]:
```
# rozklad čísel na súčin prvočísel (existuje jednoznačný rozklad)
(2^50-1).factor()
```

Out[37]:
```
3 * 11 * 31 * 251 * 601 * 1801 * 4051
```

In [38]:
```
# rozklad čísel na súčin prvočísel (2)
(10000).factor()
```

Out[38]:
```
2^4 * 5^4
```

In [39]:
```
# najväčší spoločný deliteľ
gcd(6,4)
```

Out[39]:
```
2
```

In [40]:
```
# najmenší spoločný násobok
lcm(6,4)
```

Out[40]:
```
12
```

In [41]:
```
# absolute value - absolútna hodnota
abs(-2015)
```

Out[41]:
```
2015
```

In [42]:
```
# natural logarithm - prirodzený logaritmus
ln(e^2)
```

Out[42]:
```
2
```

In [43]:
```
#NOTE: log also denotes the natural logarithm
#      that is log base e
#      log(x) tiež označuje prirodzený logaritmus
log(e^2)
```
Out[43]:
```
2
```

In [44]:
```
# Príklad výpočtu prirodzeného logaritmu
log(10.0)
```
Out[44]:
```
2.30258509299405
```

In [45]:
```
# Funkcia log(x,n) označuje logaritmus pri základe n
log(32, 2)
```
Out[45]:
```
5
```

In [46]:
```
# log pri základe 10
log(1000, 10)
```
Out[46]:
```
3
```

In [47]:
```
# výpočet logaritmu s reálnym argumentom
log(1024.0, 2)
```
Out[47]:
```
10.0000000000000
```

In [48]:
```
# trigonometrické funkcie
sin(pi/4)
```
Out[48]:
```
1/2*sqrt(2)
```

In [49]:
```
# operácie s trigonometrickými funkciami
( sin(pi/9)+cos(0)-tan(pi/4) ).n()
```
Out[49]:
```
0.342020143325669
```

In [50]:
```
# delitele
(123^4-7).divisors()
```
Out[50]:
```
[1, 2, 114443317, 228886634]
```

In [51]:
```
# zápis matematického výrazu pomocou LaTeX
p=latex(sqrt(2))
p
```
Out[51]:
```
\sqrt{2}
```

In [52]:
```
# zápis matematického výrazu pomocou LaTeX
q=latex(pi*sqrt(72))
q
```
Out[52]:
```
6 \, \sqrt{2} \pi
```

In [53]:
```
# Zobrazenie matematického výrazu pomocou LaTeX
p=latex(sqrt(2))
q=latex(sqrt(72)*pi)
show(p,';',q)
```

$\sqrt{2};6\sqrt{2}\pi$

In [54]:
```
p=latex(sin(pi/4))
show(p)
```

$\frac{1}{2}\sqrt{2}$

In [55]:
```
show(pi,' ; ', infinity,' ; ', sqrt(72))
```

$\pi\ \ ;+\infty\ \ ;6\sqrt{2}$

In [56]:
```
# Polynóm druhého stupňa - príkaz LatexExpr
var ( 'a , b , c ') ;
r=LatexExpr("f(x) = ax^2+ bx + c ")
print("Polynóm druhého stupňa:")
show(r)
```

```
Polynóm druhého stupňa:
```

$f(x) = ax^2 + bx + c$

In [57]:
```
# Konvertovanie celého čísla z desiatkovej sústavy na binárne
a = 18
a.binary()
```

Out[57]:
```
'10010'
```

In [58]:
```
# Konvertovanie celého čísla z desiatkovej sústavy na binárne
# Jednotlivé číslice čísla v binárnej (dvojkovej) sústave
# v opačnom poradí
a = 18
a.digits(2)
```

Out[58]:
```
[0, 1, 0, 0, 1]
```

In [59]:
```
# Konvertovanie celého čísla z desiatkovej sústavy do trojkovej
# sústavy. Jednotlivé číslice čísla v trojkovej sústave
# 18 = 2*3^2 +0*3^1+0*3^0
a = 18
a.digits(3)
```

Out[59]:
```
[0, 0, 2]
```

In [60]:
```
# Konvertovanie celého čísla z desiatkovej sústavy do osmičkovej
# (hexa) sústavy. Jednotlivé číslice čísla v osmičkovej sústave
# v opačnom poradí, číslice osmičkovej sústavy [0,1,2,3,4,5,6,7]
# 17 = 2*8^1 + 1*8^0
a = 17
a.digits(8)
```

Out[60]:
```
[1, 2]
```

In [61]:
```
# Konvertovanie celého čísla z des. sústavy do šestnástkovej
# sústavy. Šestnástková sústava obsahuje znaky
#       [0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F]
#       [0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,10,11,12,13,14,15]
#  31=1*16^1+15*16^0,  31 (10) = 1F (16)
a = 31
a.digits(16)
```

Out[61]:
```
[15, 1]
```

In [62]:
```
# Konvertovanie celého čísla z binárnej do desiatkovej sústavy
a=int("10001",2)
print(a)
```

```
17
```

In [63]:
```
# Konvertovanie celého čísla z osmičkovej do desiatkovej sústavy
a=int("27",8)
print(a)
```

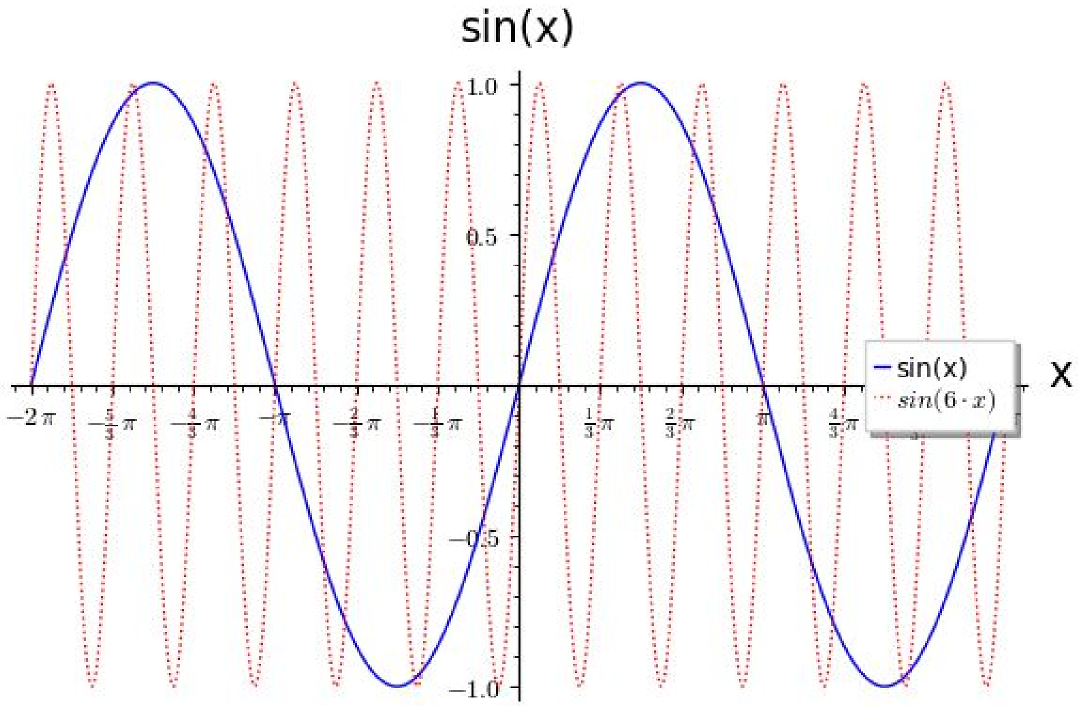
```
23
```

In [64]:
```
# Konvertovanie celého čísla zo šestnástkovej do des. sústavy
a=int("FF",16)
print(a)
```

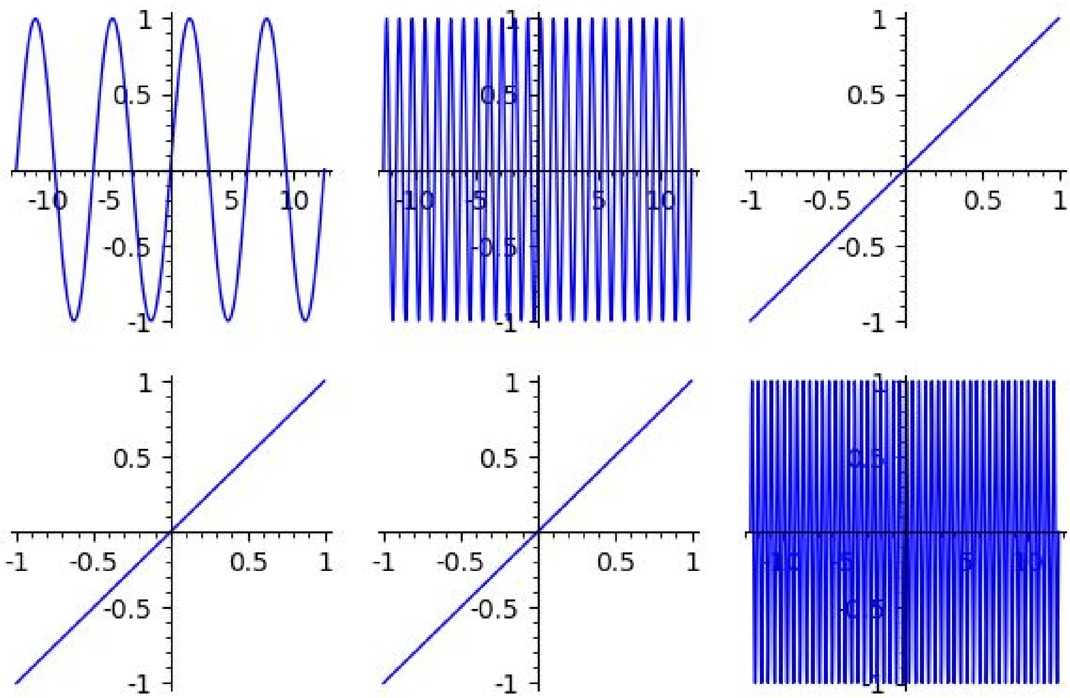
```
255
```

In [65]:
```
# Vytvorenie a zápis grafického súboru sin.png
# Create a Portable Network Graphics (png) file and save it to computer
p = plot(sin(x), x, -2*pi, 2*pi)
p.save("sin.png")
```

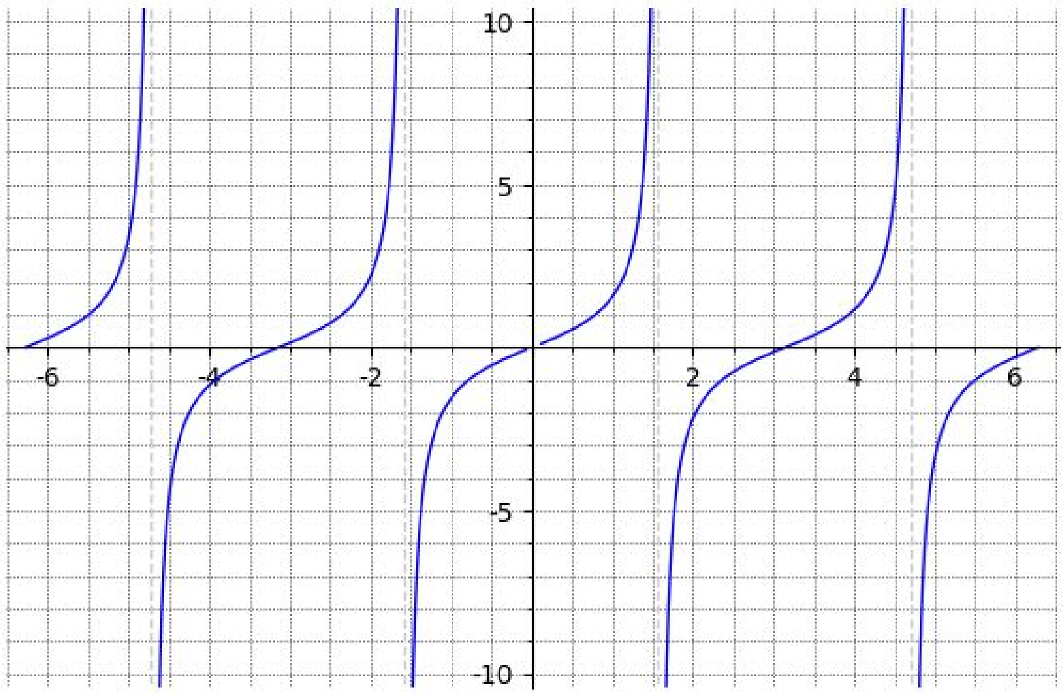
In [66]:
```
# dva grafy a ďalšie možnosti graf. výstupu
# two graphs + legend_label
p = plot(sin(x), x, -2*pi, 2*pi, color = "blue",  \
            axes_labels =[ "x","sin(x)"],         \
            ticks = pi/3, tick_formatter=pi,      \
            legend_label = "sin(x)" )
q = plot(sin(6*x), x, -2*pi, 2*pi, color = "red", \
            linestyle = "dotted",                 \
            legend_label = "$sin(6 \\cdot x)$" )
(p+q).show()
```



In [67]:
```
# pole grafov
graph1 = plot(sin(x), (x, -4*pi, 4*pi))
graph2 = plot(sin(6*x), (x, -4*pi, 4*pi))
graph3 = plot(sin(12*x), (x, -4*pi, 4*pi))
empty  = plot(x,x, -1,1)
show(graphics_array(        \
   [[graph1, graph2,empty], \
    [empty ,empty, graph3]],    2, 3))
```



In [68]:
```
plot(tan(x), -2*pi, 2*pi, detect_poles="show", gridlines="minor").show(ymin = -10, ym
ax = 10)
```



In [1]:
```
# Vzorce, funkcie a interakcie - SageMath v. 9.x (Python 3.0)
# Programové kódy: SageMath v.9.x(Python 3.0)
# Prerekvizity: diferenciálny počet, lineárna algebra, Python, LaTex
#
# Použitá literatúra:
# [1] R. E. Mezei, An introduction to SAGE programming, John Wiley,and Sons,2016
# ISBN: 978-1-119-12280-7.
#
# [2] Gregory V.Bard. Sage for Undergraduates:Second Edition,Compatible with Python3.
# American Mathematical Society,2022.ISBN978-1-4704-6155-3.
# URL https://bookstore.ams.org/mbk-143/ - Sage pre pokročilých
#
# [3] Paul, Zimmermann and Alexandre, Casamayou and Nathann, Cohen and Guillaume Con-
# nan and Thierry Dumont and Laurent Fousse and François Maltey and Matthias Meulien
# and Marc Mezzarobba and Clément Pernet and Nicolas M. Thiéry and Erik Bray and
# John Cremona and Marcelo Forets and Alexandru Ghitza and Hugh Thomas:
# Computational Mathematics with SageMath, 2018, ISBN978-1-611975-45-1.
# https://my.siam.org/Store/Product/viewproduct/?ProductId=30174951,
# https://www.sagemath.org/sagebook/english.html
#
# E-kurz: P. Szabó: Numerická matematika, 2022
# Spúšťanie programov:
#    1) Otvoriť lokalitu https://sagecell.sagemath.org/
#    2) Kopírovať obsah príkladu In[n] do SageMath boxu
#    3) Kliknutie na "Evaluate"
# Príloha publikácie:
# [4] Peter Szabó a Eva Baranová: Integrálny počet a numerická matematika, 2022, TUKE
# ISBN:978-80-553-4185-9
# Modifikované: 10.12.2022
```

In [2]:
```
# Lineárna funkcia - príkaz LatexExpr, symbolická matematika
var ( 'a , b ') ;
r=LatexExpr("f(x) = ax + b ")
print("Lineárna funkcia:")
show(r)
```

Lineárna funkcia:

$$f(x) = ax + b$$

In [3]:
```
# Riešenie lineárnej rovnice - vzorec
var ( 'a , b ') ;
p=( a*x + b ) . solve ( x )
show(p)
```

$$\left[x = -\frac{b}{a}\right]$$

In [4]:
```
# Polynóm druhého stupňa - príkaz LatexExpr
var ( 'a , b , c ') ;
r=LatexExpr("f(x) = ax^2 + bx + c")
print("Polynóm druhého stupňa:")
show(r)
```

Polynóm druhého stupňa:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

In [5]:
```
# Výpočet koreňov polynómu druhého stupňa - vzorec
var ( 'a , b , c ') ;
p=( a*x^2 + b*x + c ) . solve ( x )
show(p)
```

$$\left[x = -\frac{b + \sqrt{b^2 - 4\,ac}}{2\,a}, x = -\frac{b - \sqrt{b^2 - 4\,ac}}{2\,a}\right]$$

In [6]:
```
# Výpočet koreňov polynómu tretieho stupňa - vzorec
# Vzorec na riešenie kubickej rovnice objavili talianski matematici
# začiatkom 16. storočia. Bolo to prvýkrát, čo európska matematika
# výrazne prekonala výsledky starovekej aritmetiky a arabskej
# algebry
var ( 'a , b , c, d ') ;
r=LatexExpr("f(x) = ax^3 + bx^2 + cx +d = 0,\\quad x=?")
show(r)
p=( a*x^3 + b*x^2 + c*x + d ) . solve ( x )
show(p)
```

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d = 0, \quad x = ?$$

$$\left[x = -\frac{\left(-i\sqrt{3}+1\right)\left(\frac{b^2}{a^2} - \frac{3\,c}{a}\right)}{18\left(-\frac{b^3}{27\,a^3} + \frac{bc}{6\,a^2} - \frac{d}{2\,a} + \frac{\sqrt{-\frac{1}{3}\,b^2c^2 + \frac{4}{3}\,ac^3 + 9\,a^2d^2 + \frac{2}{3}\,(2\,b^3 - 9\,abc)d}}{6\,a^2}\right)^{\frac{1}{3}}} - \frac{1}{2}\right.$$

$$\left(i\sqrt{3}+1\right)\left(-\frac{b^3}{27\,a^3} + \frac{bc}{6\,a^2} - \frac{d}{2\,a} + \frac{\sqrt{-\frac{1}{3}\,b^2c^2 + \frac{4}{3}\,ac^3 + 9\,a^2d^2 + \frac{2}{3}\,(2\,b^3 - 9\,abc)d}}{6\,a^2}\right)^{\frac{1}{3}} - \ldots$$

$$-\frac{\left(i\sqrt{3}+1\right)\left(\frac{b^2}{a^2} - \frac{3\,c}{a}\right)}{18\left(-\frac{b^3}{27\,a^3} + \frac{bc}{6\,a^2} - \frac{d}{2\,a} + \frac{\sqrt{-\frac{1}{3}\,b^2c^2 + \frac{4}{3}\,ac^3 + 9\,a^2d^2 + \frac{2}{3}\,(2\,b^3 - 9\,abc)d}}{6\,a^2}\right)^{\frac{1}{3}}} - \frac{1}{2}$$

$$\left(-i\sqrt{3}+1\right)\left(-\frac{b^3}{27\,a^3} + \frac{bc}{6\,a^2} - \frac{d}{2\,a} + \frac{\sqrt{-\frac{1}{3}\,b^2c^2 + \frac{4}{3}\,ac^3 + 9\,a^2d^2 + \frac{2}{3}\,(2\,b^3 - 9\,abc)d}}{6\,a^2}\right)^{\frac{1}{3}} -$$

$$= \frac{\frac{b^2}{a^2} - \frac{3\,c}{a}}{9\left(-\frac{b^3}{27\,a^3} + \frac{bc}{6\,a^2} - \frac{d}{2\,a} + \frac{\sqrt{-\frac{1}{3}\,b^2c^2 + \frac{4}{3}\,ac^3 + 9\,a^2d^2 + \frac{2}{3}\,(2\,b^3 - 9\,abc)d}}{6\,a^2}\right)^{\frac{1}{3}}}$$

$$+ \left(-\frac{b^3}{27\,a^3} + \frac{bc}{6\,a^2} - \frac{d}{2\,a} + \frac{\sqrt{-\frac{1}{3}\,b^2c^2 + \frac{4}{3}\,ac^3 + 9\,a^2d^2 + \frac{2}{3}\,(2\,b^3 - 9\,abc)d}}{6\,a^2}\right)^{\frac{1}{3}} - \frac{b}{3\,a}$$

In [7]:
```
# Výpočet koreňov polynómu tretieho stupňa - vzorec
# Tento kód zistí dlžku výpočtu "vzorca" pre vyjadrenie
# koreňov polynómu 3. stupňa ax^3+bx^2+cx+d
import time
var ( 'a , b , c, d ') ;
%time p=( a*x^3 + b*x^2 + c*x + d ) . solve ( x )
```

```
CPU times: user 47 ms, sys: 0 ns, total: 47 ms
Wall time: 42.9 ms
```

In [8]:
```
# Absolútna hodnota - príkaz LatexExpr
r=LatexExpr("f(x) = |x|")
print("Absolútna hodnota :")
show(r)
```

```
Absolútna hodnota :
```

$f(x) = |x|$

In [9]:
```
# Riešenie rovnice s absolútnou hodnotou - symbolická matematika
var ( 'a') ;
p=( abs(x + a)) . solve ( x )
show(p)
```

$[x = -a]$

In [10]:
```
# Výpočet funkčných hodnôt funkcie f(x)
f(x) = cos(x)^7
# výpočet funkčnej hodnoty f v bode x = pi/6
# výsledok je v SageMath formáte (zlomky,funkcie)
f(pi/6)
```

Out[10]:
```
27/128*sqrt(3)
```

In [11]:
```
# Výpočet funkčných hodnôt funkcie f(x)
f(x) = cos(x)^7
# výpočet funkčnej hodnoty f v bode x = pi/6
# matematické vyjadrenie výsledku, zlomky a mocniny
show(f(pi/6))
```

$$\frac{27}{128}\sqrt{3}$$

In [12]:
```
# Výpočet funkčných hodnôt funkcie f(x)
f(x) = cos(x)^7
# výpočet funkčnej hodnoty f v bode x = pi/6
# decimálne vyjadrenie výsledku
f(pi/6).n()
```

Out[12]:
```
0.365354467221560
```

In [13]:
```
# derivácia funkcie - I,  SageMath formát
f(x) = cos(x)^7
f(x).diff()
```

Out[13]:
```
-7*cos(x)^6*sin(x)
```

In [14]:
```
# derivácia funkcie - II, Mat. formát
f(x) = cos(x)^7
show(f(x).derivative())
```

$$-7\cos(x)^6\sin(x)$$

In [15]:
```
# derivácia funkcie - III, SageMath formát
f(x) = cos(x)^7
derivative(f(x))
```

Out[15]:
```
-7*cos(x)^6*sin(x)
```

In [16]:
```
# derivácia funkcie - IV, SageMath formát
f(x) = cos(x)^7
diff(f(x))
```

Out[16]:
```
-7*cos(x)^6*sin(x)
```

In [17]:
```
# derivácia funkcie - V, Mat. formát
show(diff(cos(x)^7))
```

$$-7\cos(x)^6\sin(x)$$

In [18]:
```
# Derivácia funkcie f - LatexExpr
f(x)=x^2 - 7
r=LatexExpr("f(x)=")
q=LatexExpr(";f^{'}(x)=")
show(r, f(x), q, f(x).diff())
```

$$f(x) = x^2 - 7; f^{'}(x) = 2\,x$$

In [19]:
```
# Derivácia funkcie - interaktívny vstup
# funkcia typu @interact
# - slúži na tvorbu interaktívnych www stránok, pozri [2]
@interact
def derivative_interact(
     f = input_box(default = x^2-7, label = "f(x) = " ),
     auto_update=True):
     q=LatexExpr("f^{'}(x)=")
     show(q,f(x).diff())
```

In [20]:
```
# Neurčitý integrál funkcie - I, SageMath formát
f(x) = cos(x)^7
f(x).integrate(x)
```

Out[20]:
```
-1/7*sin(x)^7 + 3/5*sin(x)^5 - sin(x)^3 + sin(x)
```

In [21]:
```
# Neurčitý integrál funkcie - II, Mat. formát
show(integrate(cos(x)^7, x))
```

$$-\frac{1}{7}\sin(x)^7 + \frac{3}{5}\sin(x)^5 - \sin(x)^3 + \sin(x)$$

In [22]:
```
# Neurčitý integrál - použitie knižnice "indefinite_integral"
from sage.symbolic.integration.integral import indefinite_integral

f(x)=x^3-3*x^2+2*x
r=LatexExpr("\\int(")+latex(f(x))+LatexExpr(") dx=")
q=indefinite_integral(f(x),x)
show(r+latex(q)+" + C")
```

$$\int(x^3 - 3\,x^2 + 2\,x)dx = \frac{1}{4}\,x^4 - x^3 + x^2 + C$$

In [23]:
```
# Neurčitý integrál - interaktívne vsupy
from sage.symbolic.integration.integral import indefinite_integral

@interact
def integral(
    f = input_box(default = x^3-3*x^2+2*x),auto_update=False):
    f(x)=f
    r=LatexExpr("\\int(")+latex(f(x))+LatexExpr(")dx=")
    q=indefinite_integral(f(x),x)
    show(r+latex(q)+" + C")
```

In [24]:
```
# Určitý integrál funkcie f(x), SageMath formát
f(x) = cos(x)^7
f(x).integrate(x, 0, pi/3)
```

Out[24]:
```
1181/4480*sqrt(3)
```

In [25]:
```
# Určitý integrál funkcie f(x), výstup: zlomky a symboly
f(x) = cos(x)^7
show(f(x).integrate(x, 0, pi/3))
```

$$\frac{1181}{4480}\,\sqrt{3}$$

In [26]:
```
# Určitý integrál funkcie f(x), výsledok - decimálny formát
f(x) = cos(x)^7
show(f(x).integrate(x, 0, pi/3).n())
```

$$0.456596429405992$$

In [27]:
```
# Určitý integrál funkcie- decimálne vyjadrenie výsledku,
# zápis integrálu pomocou LaTex
f(x) = cos(x)^7
a=0
b=pi/3
r=LatexExpr("\\int_a^{b}(")+latex(f(x))+LatexExpr(") dx=")
q=f(x).integrate(x, 0, pi/3).n()
show(r+q)
```

$$\int_a^b(\cos\left(x\right)^7)dx = 0.456596429405992$$

In [28]:
```
# riešenie rovníc -  príkaz "solve"
solve ( exp ( x ) == -1/2 , x )
```

Out[28]:
```
[x == I*pi + log(1/2)]
```

In [29]:
```
# riešenie rovníc - príkaz "solve"
p = solve ( exp ( x ) == -1/2 , x )
show(p)
```

$$\left[x = i\,\pi + \log\left(\frac{1}{2}\right)\right]$$

In [30]:
```
# Riešenie sústavy rovníc - jedno riešenie
#definovanie premenných, x je default premenná
var("y")
#solve([equations], variables to solve for)
solve ([x+y==8, x-2*y==0] , x, y )
```

Out[30]:
```
[[x == (16/3), y == (8/3)]]
```

In [31]:
```
# Riešenie sústavy rovníc - jedno riešenie
#definovanie premenných, x je default premenná
var("y")
#solve([equations], variables to solve for)
p = solve ([x+y==8, x-2*y==0] , x, y )
show(p)
```

$$\left[\left[x = \left(\frac{16}{3}\right), y = \left(\frac{8}{3}\right)\right]\right]$$

In [32]:
```
# Riešenie sústavy rovníc - nekonečne veľa riešení
# definovanie premenných
var("y z")
#then solve([equations], variables to solve for)
solve ([x+y==8, x-2*z==0] , x, y,z )
```

Out[32]:
```
[[x == r1, y == -r1 + 8, z == 1/2*r1]]
```

In [33]:
```
# Riešenie sústavy rovníc - nekonečne veľa riešení
# v riešení r3 je voľná premenná, ľubovoľné reálne číslo
# definovanie premenných
var("y z")
#then solve([equations], variables to solve for)
p=solve ([x+y==8, x-2*z==0] , x, y,z )
show(p)
```

$$\left[\left[x = r_2, y = -r_2 + 8, z = \frac{1}{2}\,r_2\right]\right]$$

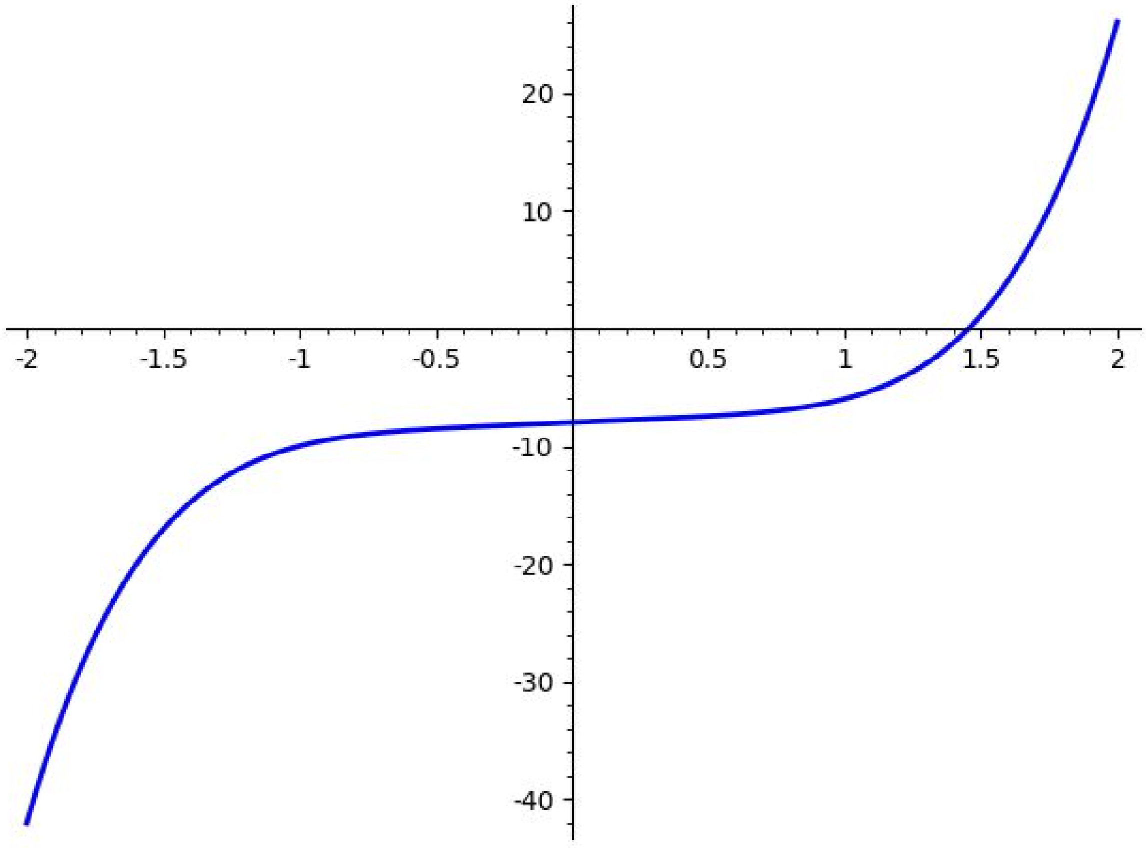
In [34]:
```
# Riešenie sústavy rovníc - sústava nemá riešenie
# definovanie premenných
var("y z")
#then solve([equations], variables to solve for)
solve ([x+y==8, x-2*z==0, x-2*z==1] , x, y,z )
```

Out[34]:
```
[]
```

In [35]:
```
# Keď Sage nevie nájsť presné riešenie
# Sage did not find the exact solution
p=solve(x^5+x==8,x)
show(p)
```

$$[0 = x^5 + x - 8]$$

In [36]:
```
# Keď Sage nevie nájsť riešenie, koreň, v tom prípade treba použiť
# numerickú metódu na nájdenie koreňa. Pred výpočtom treba zistiť
# interval separácie (kde sa nachádza jeden koreň funkcie)
# Nakreslenie funkcie
f(x)=x^5+x-8
a=-2
b= 2
p = plot(f, x, a,b, color = "blue", thickness = 2, \
              fillcolor = "red", fill = false)
p.show()
```



In [37]:
```
# Približné riešenie úlohy pomocou funkcie find_root()
#
find_root(x^5+x==8, -2, 2)
```

Out[37]: 1.456023377174738

In [38]:
```
# Kreslenie funkcií
# Elementárne funkcie a interakcie
# f(x)=ux+v - priamka (polynóm prvého stupňa)
# f(x)=px^2 + qx + r - kvadratická funkcia (polynóm druhého stupňa)
# f(x)=|x| - absolútna hodnota
# f(x)= sqrt(x) - druhá odmocnina
# f(x)= 2^x - exponenciálna funkcia
# f(x)= log(x) - logaritmická funkcia
# f(x)= sin(x), cos(x) - trigonometrické funkcie
#
# 26.09.2017, P.Szabó

@interact
def funkcie(
    f = input_box(default = x^5+x-8) ,
    a = input_box(default = -2) ,
    b = input_box(default = 2),auto_update=False):

    f(x)=f
    #plot the function
    p = plot(f, x, a,b, color = "blue", thickness = 2, \
             alpha = 0.9, fillcolor = "red", fill = false)
    p.show()
```

In [39]:
```
# Aplikácie derivácie - aproximácia matematickej funkcie
# pomocou Taylorovho polynómu.
# Taylorov polynóm 7. stupňa okolo bodu x0=0
f(x)=cos(x)^7
#taylor polynomial of degree 7, around c=0
f(x).taylor(x, 0, 7)
```

Out[39]: `-3787/720*x^6 + 133/24*x^4 - 7/2*x^2 + 1`

In [40]:
```
# Taylorov polynóm 7. stupňa okolo bodu x0=0
f(x)=cos(x)^7
#taylor polynomial of degree 7, around c=0
show(f(x).taylor(x, 0, 7))
```

$$-\frac{3787}{720}\,x^{6}+\frac{133}{24}\,x^{4}-\frac{7}{2}\,x^{2}+1$$

In [41]:
```
# input : funkcia f
# output : derivácia n-tého rádu funkcie f (n=4) (n-tá derivácia)
f(x)=cos(x)^7
n=4
r=LatexExpr('('+latex(f(x))+')^{(n)}'+' = ')
q=diff(f(x),x,n)
show(r+latex(q))
```

$$(\cos\left(x\right)^{7})^{(n)} = 133\,\cos\left(x\right)^{7}-1428\,\cos\left(x\right)^{5}\sin\left(x\right)^{2}+840\,\cos\left(x\right)^{3}\sin\left(x\right)^{4}$$

In [42]:
```
# input : funkcia f
# output : derivácia n-tého rádu  funkcie f

@interact
def integral(
    f = input_box(default = x^3-3*x^2+2*x),
    n = slider(vmin = 1, vmax = 20, default = 1, step_size=1),
    auto_update=False):
    f(x)=f

    r=LatexExpr('('+latex(f(x))+')^{(n)}'+' = ')
    q=diff(f(x),x,n)
    show(r+latex(q))
```

In [43]:
```
# Taylorov koeficient funkcie f(x) v bode a, pre n=4
f(x)=e^x
a=0
n=4
r=LatexExpr('('+latex(f(x))+')^{(n)}'+' = ')
q(x)=diff(f(x),x,n)
s=q(x)
show(r+s+';A_n='+'\\frac{f(a)^{(n)}}{n!}='+q(a)/factorial(n)+';n='+n)
```

$$(e^x)^{(n)} = e^x; A_n = \frac{f(a)^{(n)}}{n!} = 1/24; n = 4$$

In [44]:
```
# input : funkcia f
# input : bod a
# input : n- n-tá derivácia funkcie f v bode a
# output :
# output : An - Taylorov koeficient funkcie f(x) v bode a

@interact
def integral(
    f = input_box(default = e^x,label = 'f(x) ='),
    a = input_box(default = 0, label = 'a ='),
    n = slider(vmin = 1, vmax = 20, default = 1, step_size=1, label = 'n-tá d. ='),
    auto_update=False):
    f(x)=f

    r=LatexExpr('('+latex(f(x))+')^{(n)}'+' = ')
    q(x)=diff(f(x),x,n)
    s=q(x)
    show(r+s+';A_n='+q(a)/factorial(n)+';n='+n)
```

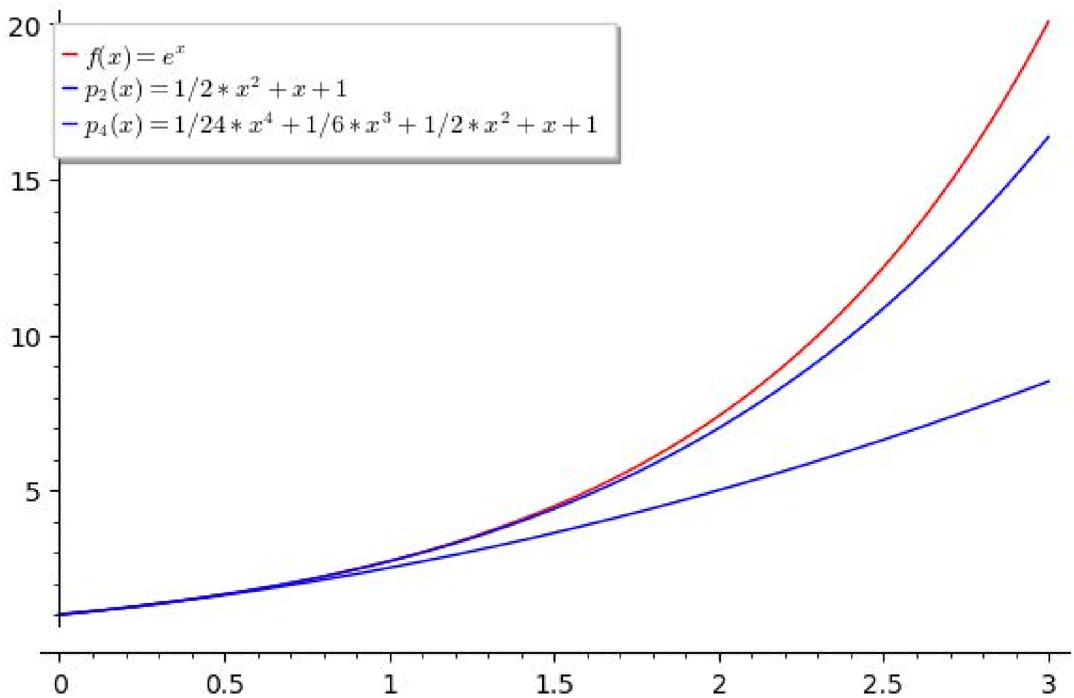
In [45]:
```
# Taylorov rad funkcie f okolo bodu a=0 s presnosťou x^8, vlastnosť funkcie
# f(x).series
f=sin(x).series(x,8)
show(f)
```

$$1x + (-\frac{1}{6})x^3 + \frac{1}{120}x^5 + (-\frac{1}{5040})x^7 + \mathcal{O}\left(x^8\right)$$

In [46]:
```
# Taylorov polynóm(rad) funkcie f okolo bodu a=0 s presnosťou x^10,
# vlastnosť funkcie f(x).taylor
f = sin(x)
show(f.taylor(x, 0, 10))
```

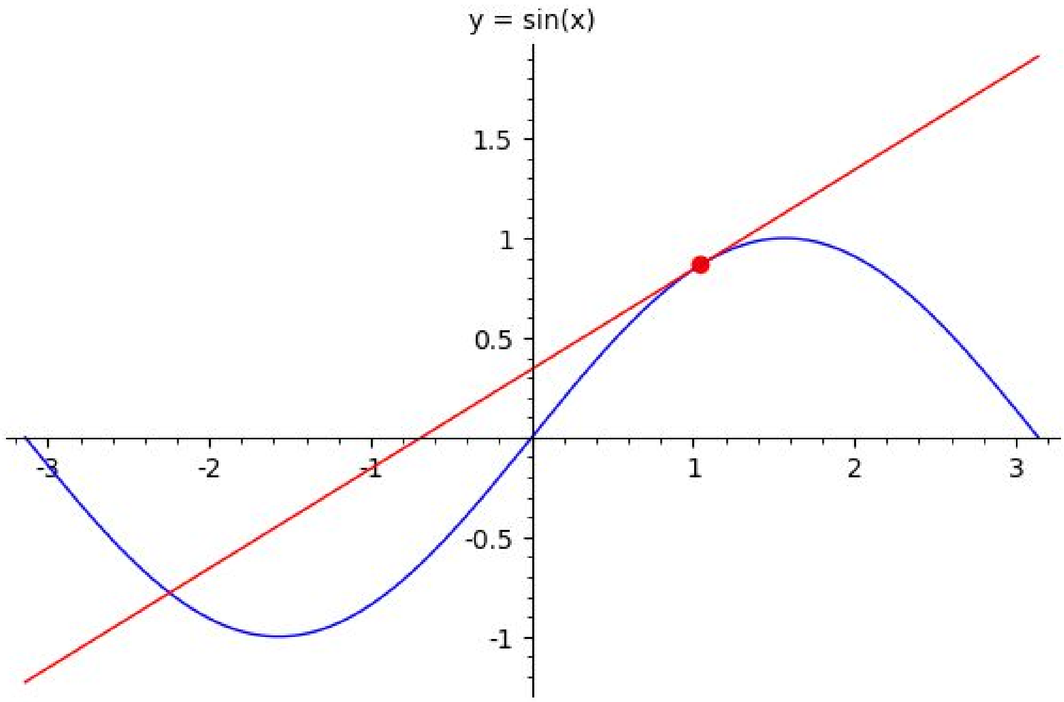
$$\frac{1}{362880}x^9 - \frac{1}{5040}x^7 + \frac{1}{120}x^5 - \frac{1}{6}x^3 + x$$

In [47]:
```
# Taylorov polynóm p2, p4 funkcie f okolo bodu a=0
f(x)=e^x
a=0
b=3
around=0
degrees=[2 , 4]
p = plot(f(x), x, a, b, color = "red", legend_label = "$f(x) = "+str(f(x))+"$" )
for n in degrees:
        t(x)=f(x).taylor(x,around,n)
        p += plot(t(x), x, a, b,
             color = "blue",
             legend_label = "$p_"+str(n)+"(x)="+str(t(x))+"$")
p.show()
```



In [48]:
```
# Taylorov polynóm ľubovoľnej spojitej funkcie pomocou interaktívnych vstupov

@interact
def TaylorPlotInteract(
    f = input_box(default = e^x),
    a = input_box(default = 0),
    b = input_box(default = 3),
    around  = input_box(default = 0),
    degrees = input_box(default  = [1 , 2]),
    auto_update=False):
    f(x) = f
    p = plot(f(x), x, a, b,
             color = "red",
       legend_label = "$f(x) = "+str(f(x))+"$" )
    for n in degrees:
        t(x)=f(x).taylor(x,around,n)
        p += plot(t(x), x, a, b,
             color = "blue",
             legend_label = "$p_"+str(n)+"(x)="+str(t(x))+"$")
    p.show()
```

In [49]:
```
# Geometrická interpretácia derivácie
# Dotyčnica funkcie f(x) v bode x0 (f(x)=sin(x))
f(x)=sin(x)
x0=pi/3
p1 = plot(f(x), x,-pi,pi)
#then we compute and plot the tangent line at x0
df(x) = diff(f(x))
m = df(x0)
p2 = plot( m*(x-x0)+f(x0) , x,-pi,pi, color = "red")

#we plot the tangent point
p3 = list_plot([(x0, f(x0))], size = 50, color="red")
(p1+p2+p3).show(title = "y = "+ str(sin(x)))
```



In [50]:
```
# Geometrická interpretácia derivácie
# Dotyčnica funkcie f(x) v bode x0, f(x) je ľubovoľná funkcia
# Použitie technológie Interact
@interact
def TangentInteract2(
    f = input_box(default=sin(x) ),
    x0 = slider(vmin=-pi, vmax=pi, step_size=pi/12,
               default=0, label="Select the point x0"),
    tancolor = selector(values = ["red", "blue", "yellow",
    "purple", "green"],
                 label = "Tangent line's color:",default = "red" )):
    #here comes the body of the interact:
    #first we plot the function:
    p1 = plot(f(x), x,-pi,pi)
    #then we compute and plot the tangent line at x0
    df(x) = diff(f(x))
    m = df(x0)
    p2 = plot( m*(x-x0)+f(x0) , x,-pi,pi, color = tancolor)
    #for a better view,
    #we plot the tangent point
    p3 = list_plot([(x0, f(x0))], size = 50, color=tancolor)
    (p1+p2+p3).show()
```

In [1]:
```
# Numerické integrovanie a numerické riešenie diferenciálnych rovníc
# Programové kódy: SageMath v.9.x(Python 3.0)
# Prerekvizity: Integrálny počet, diferenciálne rovnice, Python, LaTex
#
# Použitá literatúra:
# [1] R. E. Mezei, An introduction to SAGE programming, John Wiley,and Sons,2016
# ISBN: 978-1-119-12280-7.
#
# [2] Gregory V.Bard. Sage for Undergraduates:Second Edition,Compatible with Python3.
# American Mathematical Society,2022.ISBN978-1-4704-6155-3.
# URL https://bookstore.ams.org/mbk-143/ - Sage pre pokročilých
#
# [3] Paul, Zimmermann and Alexandre, Casamayou and Nathann, Cohen and Guillaume Con-
# nan and Thierry Dumont and Laurent Fousse and François Maltey and Matthias Meulien
# and Marc Mezzarobba and Clément Pernet and Nicolas M. Thiéry and Erik Bray and
# John Cremona and Marcelo Forets and Alexandru Ghitza and Hugh Thomas:
# Computational Mathematics with SageMath, 2018, ISBN978-1-611975-45-1.
# https://my.siam.org/Store/Product/viewproduct/?ProductId=30174951,
# https://www.sagemath.org/sagebook/english.html
#
# E-kurz: P. Szabó: Numerická matematika, 2022
# Spúšťanie programov:
#    1) Otvoriť lokalitu https://sagecell.sagemath.org/
#    2) Kopírovať obsah príkladu In[n] do SageMath boxu
#    3) Kliknutie na "Evaluate"
# Príloha publikácie:
# [4] Peter Szabó a Eva Baranová: Integrálny počet a numerická matematika, 2022, TUKE
# ISBN:978-80-553-4185-9
# Modifikované: 10.12.2022
```

In [2]:
```
# Výpočet neurčitého integrálu, výpočet primitívnej funkcie
# Použitie knižnice "indefinite_integral"
from sage.symbolic.integration.integral import indefinite_integral

# vstup : funkcia f
# výstup: funkcia F

f(x)=x^3-3*x^2+2*x
r=LatexExpr("\\int(")+latex(f(x))+LatexExpr(")dx=")
F=indefinite_integral(f(x),x)
show(r+latex(F)+" + C")
```

$$\int(x^3 - 3\,x^2 + 2\,x)dx = \frac{1}{4}\,x^4 - x^3 + x^2 + C$$

In [3]:
```
# Výpočet neurčitého integrálu - vstup ľubovoľná funkcia cez @interact
# Tvorba tabuliek s integrálmi
# Použitie knižnice "indefinite_integral"
from sage.symbolic.integration.integral import indefinite_integral

# vstup : ľubovoľná spojitá funkcia f
# výstup: funkcia F

@interact
def integral(
    f = input_box(default = x^3-3*x^2+2*x),auto_update=False):
    f(x)=f
    r=LatexExpr("\\int(")+latex(f(x))+LatexExpr(")dx=")
    F=indefinite_integral(f(x),x)
    show(r+latex(F)+" + C")
```

In [4]:
```
# Výpočet určitého integrálu
# Použitie knižnice "definite_integral"
# Primitívna funkcia, Newton - Leibnitzov vzorec, F(b)-F(a)

from sage.symbolic.integration.integral import definite_integral

# vstup : funkcia p a interval [a,b]
p=sin(x)*sin(x)
a=0
b=pi

r=LatexExpr("\\int_0^{\\pi}sin^2(x)dx=")
# Výpočet
q=definite_integral(p,x,a,b)
# Primitívna funkcia
F=diff(p,x)
show(r+"["+latex(F)+"]_0^{\\pi}="+latex(q))
```

$$\int_0^{\pi} sin^2(x)dx = [2\,\cos(x)\sin(x)]_0^{\pi} = \frac{1}{2}\,\pi$$

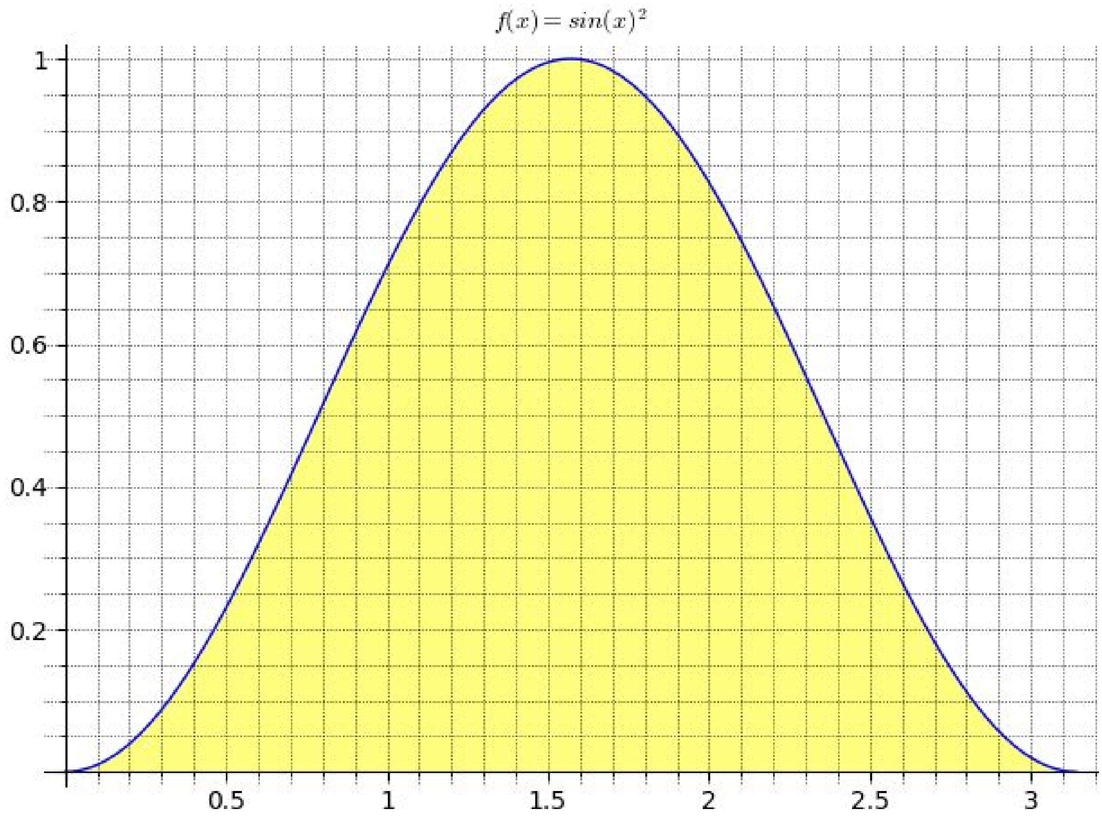
In [5]:
```
# Výpočet určitého integrálu funkcie f(x)
# Niekedy je potrebné vykonať výpočet za určitých predpokladov
# Predpoklady môžeme nastaviť pomocou príkazu assume()
# Testovať platných predpokladov pomocou assumptions()
# V riešení  erf - je tzn. error function

from sage.symbolic.integration.integral import definite_integral

var('x','a','b','c','y')
f(x)= e^(-pi*(x-2*y/c)^2/(a*a))
assume(a>0)
assume(c>0)
g(x) = definite_integral(f(x),x,a,b)
g.show()
assumptions()
```

$$x \mapsto \frac{1}{2}\,a\,\mathrm{erf}\left(-\frac{\sqrt{\pi}(ac-2\,y)}{ac}\right) - \frac{1}{2}\,a\,\mathrm{erf}\left(-\frac{\sqrt{\pi}(bc-2\,y)}{ac}\right)$$

Out[5]: `[a > 0, c > 0]`

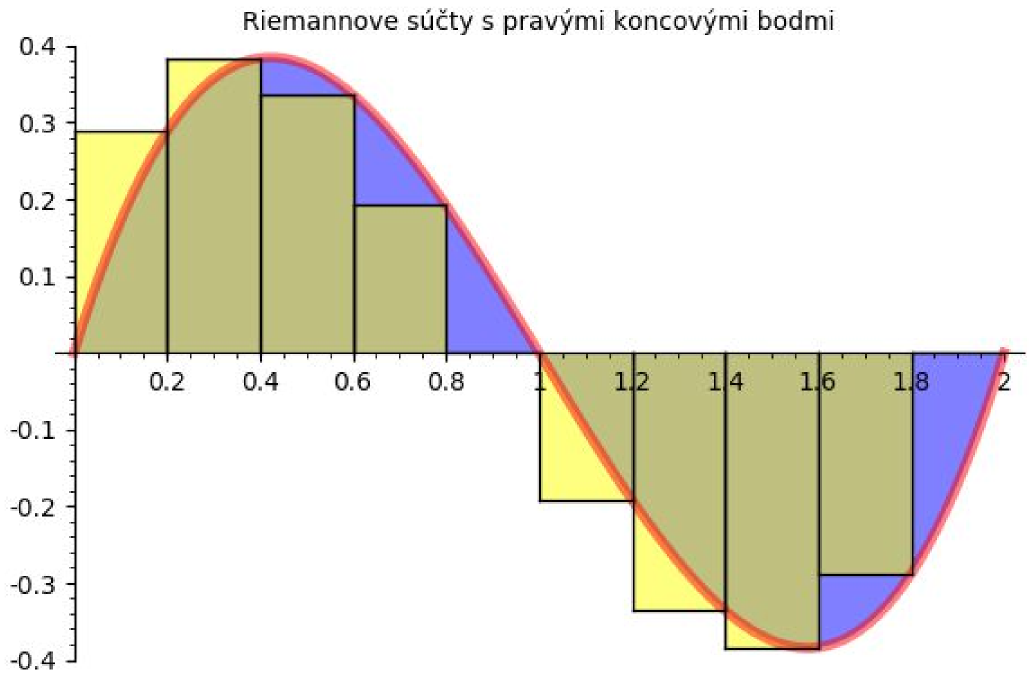
In [6]:
```
# Výpočet určitého integrálu, graf funkcie f a riešenie
# Použitie knižnice "definite_integral"
from sage.symbolic.integration.integral import definite_integral

# vstup : funkcia p a interval [a,b]
f=sin(x)*sin(x)
a=0
b=pi

r=LatexExpr("\\int_0^{\\pi}sin^2(x)dx=")
# Výpočet
q=definite_integral(f,x,a,b)
show(r+latex(q))
s=plot(f,x,a,b,gridlines='minor', title="$ f(x)="+str(f)+" $", \
       fillcolor = "yellow", fill = true)
s.show()
```

$$\int_0^{\pi} sin^2(x)dx = \frac{1}{2}\pi$$



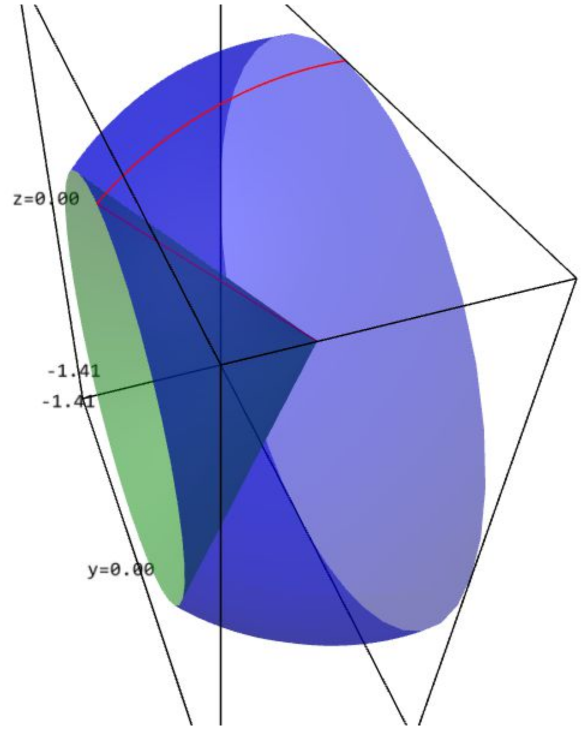
In [7]:
```
# Určitý integrál - interaktívny výpočet s grafom

# Použitie knižnice "definite_integral"
from sage.symbolic.integration.integral import definite_integral

# vstupy : funkcia f a interval [a,b].
# outputs : hodnota určitého integrálu f na  [a,b], oblasť pod (nad) f
# author: P. Szabó, 12 March 2018

@interact
def integral(
    f = input_box(default = x^3-3*x^2+2*x) ,
    a = input_box(default =  -0.5) ,
    b = input_box(default = 2.5),
    gr = selector(values = ["Yes", "No"],
             label = "Graph", default = "No" ), auto_update=False):
    show("Integral computation")
    f(x)=f
    r=LatexExpr("\\int_a^{b}(")+latex(f(x))+LatexExpr(")dx=")
    q=definite_integral(f(x),x,a,b)
    show(r+latex(q))
    if (gr == "Yes"):
        r=plot(f(x),x,a,b,gridlines='minor',title="$f(x)="+str(f(x))+"$",\
               fillcolor = "yellow", fill = true)
        r.show()
```

In [8]:
```
# Riemannov integrál, delenie intervalu, integrálne súčty, limita postupnosti
# integrálnych súčtov, pozri [1].
# Vstupy: funkcia f, interval [a,b], n - počet delení intervalu
# Výstup: graf funkcie s delením intervalu a integrálnymi súčtami

f(x)=x^3-3*x^2+2*x
a=0
b=2
n=10

# kreslenie funkcie
p = plot(f, x, a,b, color = "red", thickness = 4, alpha = 0.5, \
         fillcolor = "blue", fill = true)
dx = (b-a)/n
# kreslenie obdlžníkov
for i in [1,2,..,n]:
#for the shading ...
    xbegin = a+(i-1)*dx
    xend   = a+i*dx
    p += polygon( [(xbegin,0),  (xend,0),               \
                       (xend, f(xend)), (xbegin,f(xend))],  \
                       color="yellow",alpha = 0.5, aspect_ratio=
                       "automatic")
    #these are optional for a better graph:
    p += line([(xend,0), (xend, f(xend))], color = "black")
    p += line([(xend, f(xend)), (xbegin,f(xend))], color = "black")
    p += line([(xbegin, f(xend)),(xbegin,0) ], color = "black")
p.show(title = "Riemannove súčty s pravými koncovými bodmi", ticks = dx)
```



In [9]:
```
# Riemannov integrál, delenie intervalu, integrálne súčty, limita postupnosti
# integrálnych súčtov, pozri [1].
# Vstupy: funkcia f, interval [a,b], n - počet delení intervalu
# Vstupy interaktívne modifikovateľne
# Výstup: graf funkcie s delením intervalu a integrálnymi súčtami

@interact
def RiemannSum(
    f = input_box(default = x^3-3*x^2+2*x) ,
    a = input_box(default =  0) ,
    b = input_box(default = 2) ,
    n = slider(vmin = 1, vmax = 20, default = 8, step_size=1)  ):
    f(x)=f
    #plot the function
    p = plot(f, x, a,b, color = "red", thickness = 4, \
             alpha = 0.5, fillcolor = "blue", fill = true)
    dx = (b-a)/n
    #plot each trapezoid
    for i in [1,2,..,n]:
    #for the shading ...
        xbegin = a+(i-1)*dx
        xend   = a+i*dx
        p += polygon( [(xbegin,0),  (xend,0),              \
                       (xend, f(xend)), (xbegin,f(xend))],  \
                       color="yellow",alpha = 0.5, aspect_ratio=
                       "automatic")
       #these are optional for a better graph:
        p += line([(xend,0), (xend, f(xend))], color = "black")
        p += line([(xend, f(xend)), (xbegin,f(xend))], color = "black")
        p += line([(xbegin, f(xend)),(xbegin,0) ], color = "black")
    p.show(title = "Riemann Sum with Right Endpoints", ticks = dx)
```

In [10]:
```
# Aplikácia určitého integrálu - výpočet objemu rotačného telesa
# Vstupy: funkcie f,g interval [a,b]
# Výstup: graf rotačného telesa medzi funkciami f,g na intervale
# [a,b], objem rotačného telesa
from sage.symbolic.integration.integral import definite_integral

f(x)=sqrt(2-x^2)
g(x)=x
a=0
b=1
# plot 2 funkcie
P1 =plot((f,g), (x,a,b), fill = True)
G2 = revolution_plot3d(f,(x,a,b), show_curve =True, \
            color='blue', opacity =0.5 ,parallel_axis ='x')
G3 = revolution_plot3d(g,(x,a,b), show_curve =True, \
            color = 'green', opacity =0.5 ,parallel_axis ='x')
G4 = G2+G3
# výpočet integrálu
Objem = pi*definite_integral((f(x)^2 - g(x)^2),x,a,b)
G4.show()
q=LatexExpr("Objem =")
show(q,latex(Objem))
```

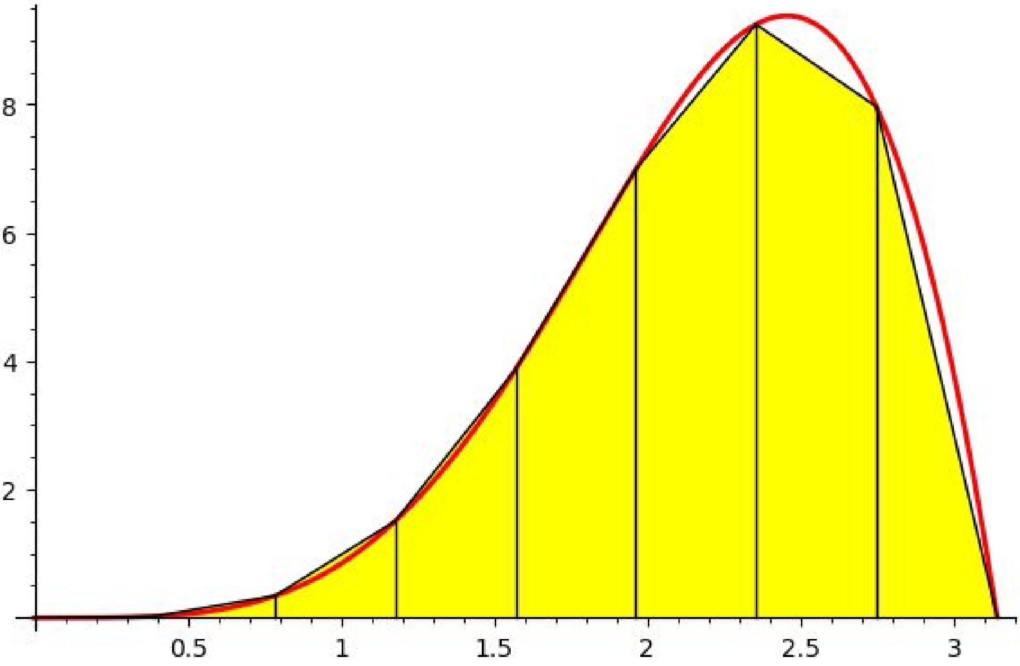


$$Objem = \frac{4}{3}\pi$$

In [11]:
```
# Aplikácia určitého integrálu - výpočet objemu rotačného telesa
# Vstupy: funkcie f,g interval [a,b] - interaktívne modifikovateľne
# Výstup: graf rotačného telesa medzi funkciami f,g na intervale
# [a,b], objem rotačného telesa
from sage.symbolic.integration.integral import definite_integral

@interact
def RotTeleso(
    f = input_box(default = x),
    g = input_box(default = x^2),
    a = input_box(default = 0),
    b = input_box(default = 1)):
    f(x)=f
    g(x)=g
    # plot 2 funkcie
    P1 =plot((f,g), (x,a,b), fill = True)
    G2 = revolution_plot3d(f,(x,a,b),show_curve =True, \
                color='blue', opacity =0.5 ,parallel_axis ='x')
    G3 = revolution_plot3d(g,(x,a,b),show_curve =True, \
                color = 'green', opacity =0.5 ,parallel_axis ='x')
    G4 = G2+G3
    # výpočet integrálu
    Objem = pi*definite_integral((f(x)^2 - g(x)^2),x,a,b)
    G4.show()
    print ('Objem =',Objem)
```

In [12]:
```
# Numerický výpočet určitého integrálu
# Lichobežníková metóda, delenie intervalu, pozri [1]
# Odhad - súčet plošných obsahov lichobežníkov
# Používanie knižnice "numpy" - numerické výpočty pre Python
# Vstupy: funkcia, f, interval [a,b], n - počet delení intervalu

import numpy
f(x)=x**3*sin(x)
a=0
b=3.14
n=8

#compute the size of each subinterval
delta_x = (b-a)/n
#compute the intermediate points
xi_values = [a,a+delta_x,..,b]
#compute the corresponding y values
fxi_values = [f(i) for i in xi_values]
#compute the Trapezoidal Rule value
print ("approximation = ",  numpy.trapz(fxi_values ,
    dx=delta_x).n(), \
          "\t exact value = ",  integrate(f(x), x, a, b).n())
p = plot(f, x, a,b, color = "red", thickness = 2)
#plot each trapezoid
p += line( [(a,0),  (a,f(a))] , color = "black")
for i in [1,2,..,n]:
    p += line( [(a+(i-1)*delta_x,f(a+(i-1)*delta_x)), \
        (a+i*delta_x,f(a+i*delta_x))] , color = "black")
    p += line( [(a+i*delta_x,0),  (a+i*delta_x,f(a+i*delta_x))] , \
        color = "black")
        #for the shading ...
    p += polygon( [(a+(i-1)*delta_x,0),                \
        (a+(i-1)*delta_x,f(a+(i-1)*delta_x)),    \
        (a    +i*delta_x, f(a+i*delta_x)),       \
        (a+    i*delta_x,       0)],       \
        color="yellow",                \
        aspect_ratio="automatic")
p.show()
```

```
approximation =  11.7606987535509        exact value =  12.1566814742107
```



In [13]:
```
# Numerický výpočet určitého integrálu
# Lichobežníková metóda, delenie intervalu, pozri [1]
# Odhad - súčet plošných obsahov lichobežníkov
# Používanie knižnice "numpy" - numerické výpočty pre Python
# Vstupy: funkcia, f, interval [a,b], n - počet delení intervalu
# Aplikácia @interact  - modifikácia vstupov
import numpy
@interact
def TrapezoidByNumPy(
    f = input_box(default = e^x),
    a = input_box(default = 0),
    b = input_box(default = 3),
    n = slider(vmin=2, vmax=50, default = 4, step_size = 1)):
    #needed to avoid the warning message
    f(x)=f
    #compute the size of each subinterval
    delta_x = (b-a)/n
    #compute the intermediate points
    xi_values = [a,a+delta_x,..,b]
    #compute the corresponding y values
    fxi_values = [f(i) for i in xi_values]
    #compute the Trapezoidal Rule value
    print ("approximation = ",  numpy.trapz(fxi_values ,
    dx=delta_x).n(), \
          "\t exact value = ",  integrate(f(x), x, a, b).n())
    p = plot(f, x, a,b, color = "red", thickness = 4)
    #plot each trapezoid
    p += line( [(a,0),  (a,f(a))] , color = "black")
    for i in [1,2,..,n]:
        p += line( [(a+(i-1)*delta_x,f(a+(i-1)*delta_x)), \
                    (a+i*delta_x,f(a+i*delta_x))] , color = "black")
        p += line( [(a+i*delta_x,0),  (a+i*delta_x,f(a+i*delta_x))] , \
                   color = "black")
        #for the shading ...
        p += polygon( [(a+(i-1)*delta_x,0),              \
                       (a+(i-1)*delta_x,f(a+(i-1)*delta_x)),    \
                       (a    +i*delta_x, f(a+i*delta_x)),      \
                       (a+    i*delta_x,       0)],       \
                       color="yellow",                \
                       aspect_ratio="automatic")
    p.show()
```

In [14]:
```
# Symbolický výpočet určitého integrálu na intervale <0,oo)
u = var('u');
f = x * cos(u) / (u^2 + x^2);
assume(x>0);
h = f.integrate(u, 0, infinity);
show(h)
```

$$\frac{1}{2}\,\pi e^{(-x)}$$

In [15]:
```
# Numerický výpočet integrálu sin(x)/x, od 0 do 1
integral_numerical(sin(x)/x, 0, 1)
```

Out[15]:
```
(0.946083070367183, 1.0503632079297087e-14)
```

In [16]:
```
# Integrál funkcie exp(-x**2), na intervale <0,oo)
# Symbolické a číselné vyjadrenie výsledku
g = integrate(exp(-x**2), x, 0, infinity);
show(g)
g.n()
```

$$\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

Out[16]: 0.886226925452758

In [17]:
```
# Riešenie obyčajnej diferenciálnej rovnice
# vstupy: x'(t)+ x(t) = 2; pozri [1]
# výstup: funkcia x(t)
var('t')
x = function('x')(t)
de = diff(x,t) + x - 2
p=desolve(de==0, x)
q=LatexExpr("x(t)=")
show(q,p)
```

$$x(t) = \left(C + 2\,e^{t}\right)e^{(-t)}$$

In [18]:
```
# Riešenie obyčajnej diferenciálnej rovnice
# vstupy: x'+ x = 2; pozri [1]
# výstup: funkcia x(t)
# Aplikácia @interact  - modifikácia vstupov
var('t')
@interact
def Interact2( de = input_box(default = "diff(x,t) + x - 2" ,
            label = "ODE = ")):
    x = function('x')(t)
    desolve(de==0, x).show()
```

In [19]:
```
# Riešenie obyčajnej diferenciálnej rovnice
# vstupy: x'+ x = 2; x(0) = 10 (začiatočná podmienka)
# výstup: funkcia x(t)
var('t')
x = function('x')(t)
de = diff(x,t) + x - 2
p=desolve(de==0, x, ics = [0,10])
q=LatexExpr("x(t)=")
show(q,p)
```

$$x(t) = 2\left(e^{t} + 4\right)e^{(-t)}$$

In [20]:
```
# Riešenie obyčajnej diferenciálnej rovnice
# vstupy: x'+ x = 2; x(0) = 10 (začiatočná podmienka)
# výstup: funkcia x(t)
# aplikácia @interact - interaktívne vstupy, pozri [1]

var('t')
x = function('x')(t)
@interact
def ODEInteract(
    choice = selector(values = ['yes','no'],
                  label = 'initial condition?',
                  default = 'yes')):
    if (choice == 'yes'):
        @interact
        def Interact1( de = input_box(default = "diff(x,t) + x - 2",
                                label = "ODE = "),
                       t0 = input_box(default = 0,
                                label = "t0="),
                       xt0 = input_box(default = 10,
                                label = "x(t0)=")):
            desolve(de==0, x, ics = [t0, xt0]).show()
    else:
        @interact
        def Interact2( de = input_box(default = "diff(x,t) + x - 2",
                label = "ODE = ")):
            desolve(de==0, x).show()
```

In [21]:
```
# Nasledujúce príklady sa nachádzajú v knihe
# Computational Mathematics with SageMath,  pozri[3]
# Základné parametre a  kód systému riešenia dif. rovníc
# x = var('x')
# y = function('y')(x)
# desolve(equation, variable, ics = ..., ivar = ...,
# .....show_method = ..., contrib_ode = ...)
# Lineárne diferenciálne rovnice typu: y' + P(x)y = Q(x)
# Riešte dif. rovnicu y' + 3y = e^x
x = var('x')
y = function('y')(x)
p = desolve(diff(y,x) + 3*y == exp(x), y, show_method=True)
show(p)
```

$$\left[\frac{1}{4}\left(4\,C + e^{(4\,x)}\right)e^{(-3\,x)}, \texttt{linear}\right]$$

In [22]:
```
# Separovateľné diferenciálne rovnice typu: P(x) = y'Q(y)
# Riešte dif. rovnicu x=y'y
x = var('x')
y = function('y')(x)
p = desolve(y*diff(y,x) == x, y, show_method=True)
show(p)
```

$$\left[\frac{1}{2}\,y(x)^2 = \frac{1}{2}\,x^2 + C, \texttt{separable}\right]$$

In [23]:
```
# Bernoulliho diferenciálne rovnice typu: y' + P(x)y = Q(x)y^alpha,
# alpha<>0,alpha<>1.
# Riešte dif. rovnicu y' - y = xy^4
x = var('x')
y = function('y')(x)
p = desolve(diff(y,x)-y == x*y^4, y, show_method=True)
show(p)
```

$$\left[\frac{e^{x}}{\left(-\frac{1}{3}\,(3\,x-1)e^{(3\,x)}+C\right)^{\frac{1}{3}}},\mathtt{bernoulli}\right]$$

In [24]:
```
# Homogénne diferenciálne rovnice typu: y'= P(x,y)/Q(x,y)
# Riešte dif. rovnicu x^2y' = y^2 + xy + x^2.
x = var('x')
y = function('y')(x)
p = desolve(x^2*diff(y,x) == y^2+x*y+x^2, y, show_method=True)
show(p)
```

$$\left[Cx=e^{\arctan\left(\frac{y(x)}{x}\right)},\mathtt{homogeneous}\right]$$

In [25]:
```
# Exaktné diferenciálne rovnice typu:  ∂f/∂x dx + ∂f/∂y dy,
# Riešte dif. rovnicu y' = (cos(y)-2x)/(y+x sin(y)),
# pričom f(x,y)= x^2 - xcos(y) + y^2/2.
x = var('x')
y = function('y')(x)
p = desolve(diff(y,x)==(cos(y)-2*x)/(y+x*sin(y)), y,show_method=True)
show(p)
```

$$\left[x^{2}-x\cos(y\,(x))+\frac{1}{2}\,y(x)^{2}=C,\mathtt{exact}\right]$$

In [26]:
```
# Zložitejšie diferenciálne rovnice riešime tak, že nastavíme
# parameter  contrib_ode=True
# y' = P(x)y^2 + Q(x)y + R(x), (dif. rovnice typu Ricatti)
# vo výstupe sa nachádzajú tzn. Besselove funkcie
# Riešte dif. rovnicu:  y' = xy^2 +(1/x)y - 1/x^2
x = var('x')
y = function('y')(x)
p=desolve(diff(y,x) == x*y^2+y/x-1/x^2, y,contrib_ode=True,\
          show_method=True)
print(p)
show(p)
```

```
[[y(x) == -1/2*((_C*(bessel_Y(4, 2*sqrt(-x)) - bessel_Y(2, 2*sqrt(-x))) + bessel_J(4, 2*s
qrt(-x)) - bessel_J(2, 2*sqrt(-x)))*x + 3*(_C*bessel_Y(3, 2*sqrt(-x)) + bessel_J(3, 2*sqr
t(-x)))*sqrt(-x))/((_C*bessel_Y(3, 2*sqrt(-x)) + bessel_J(3, 2*sqrt(-x)))*sqrt(-x)*x^2)],
'riccati']
```

$$\left[\left[y\,(x)=-\frac{(C(Y_{4}(2\,\sqrt{-x})-Y_{2}(2\,\sqrt{-x}))+J_{4}(2\,\sqrt{-x})-J_{2}(2\,\sqrt{-x}))x+3\,(CY_{3}(2\,\sqrt{-x})+J_{3}(2\,\sqrt{-x}))\sqrt{-x}}{2\,(CY_{3}(2\,\sqrt{-x})+J_{3}(2\,\sqrt{-x}))\sqrt{-x}x^{2}}\right],\mathtt{riccati}\right]$$

In [27]:
```
# Lineárne diferenciálne rovnice
# Riešte dif. rovnicu y' + 2y = x^2 - 2x + 3:
x = var('x')
y = function('y')(x)
DE = diff(y,x)+2*y == x**2-2*x+3
p = desolve(DE, y,show_method=True)
show(p)
```

$$\left[\frac{1}{4}\left((2x^2-2x+1)e^{(2x)}-2(2x-1)e^{(2x)}+4C+6e^{(2x)}\right)e^{(-2x)}, \texttt{linear}\right]$$

In [28]:
```
# Lineárne diferenciálne rovnice
# Riešte dif. rovnicu y' + 2y = x^2 - 2x + 3:
# zjednodušenie riešenia
x = var('x')
y = function('y')(x)
DE = diff(y,x)+2*y == x**2-2*x+3
p = desolve(DE, y).expand()
show(p)
```

$$\frac{1}{2}x^2+Ce^{(-2x)}-\frac{3}{2}x+\frac{9}{4}$$

In [29]:
```
# Riešte dif. rovnicu y'log(y) = y sin(x)
x = var('x')
y = function('y')(x)
de = diff(y,x)*log(y) == y*sin(x)
p = desolve(de, y, show_method=True)
show(p)
```

$$\left[\frac{1}{2}\log(y(x))^2 = C-\cos(x), \texttt{separable}\right]$$

In [30]:
```
# Riešte dif. rovnicu y'log(y) = y sin(x)
# Riešenie úlohy sa nachádza v zloženej funkcii
# Preto ešte treba vyjadriť riešenie, funkciu y(x)
x = var('x')
y = function('y')(x)
ed = desolve(diff(y,x)*log(y) == y*sin(x), y)
p = solve(ed,y)
show(p)
```

$$\left[y(x) = e^{\left(-\sqrt{2C-2\cos(x)}\right)}, y(x) = e^{\left(\sqrt{2C-2\cos(x)}\right)}\right]$$

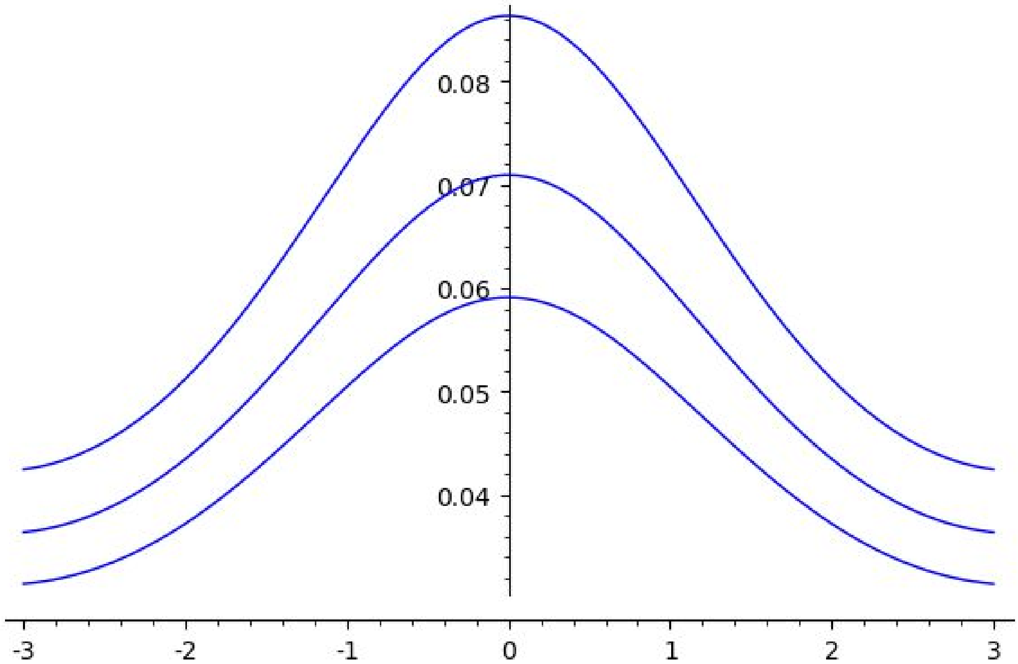
In [31]:
```
# Riešenie je definované pre C>1.
# Nasledovný kód nakreslí riešenie pre C=2
# Najprv zistíme premenné (konštanty) v riešení
ed.variables()
```

Out[31]: (_C, x)

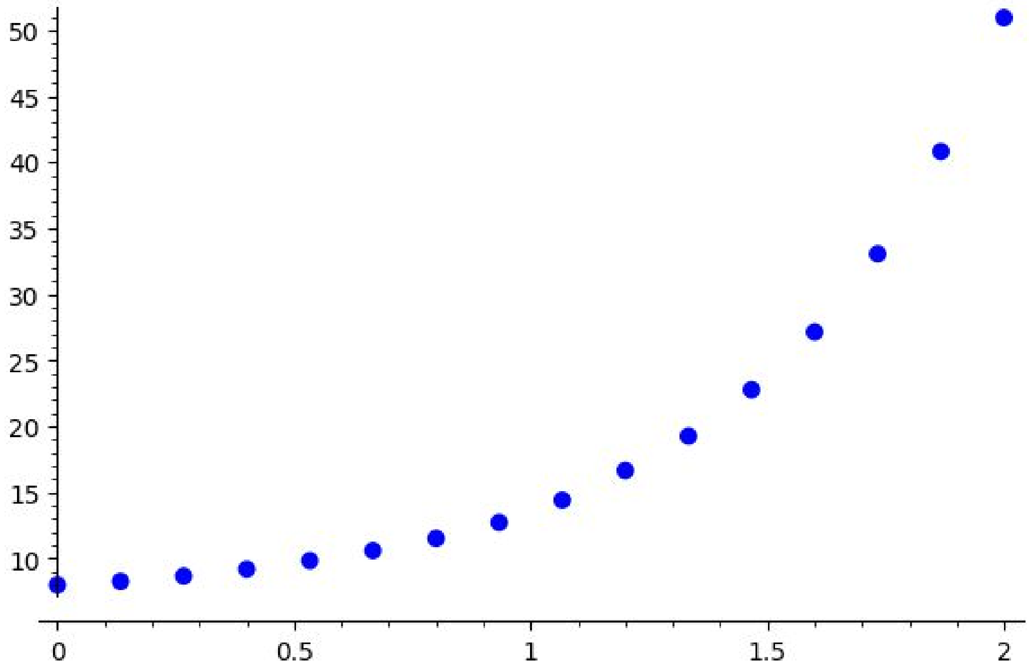
In [32]:
```
# Teraz dosadíme do konštanty c, c=5
c = ed.variables()[0]
p=solve(ed, y)[0].substitute(c == 5).rhs()
show(p)
```

$$e^{\left(-\sqrt{-2\cos(x)+10}\right)}$$

In [33]:
```
# Nakreslenie riešenia ODE pre niektoré konštanty c.

p = plot(solve(ed, y)[0].substitute(c == 5).rhs(), x, -3, 3)
p +=plot(solve(ed, y)[0].substitute(c == 4.5).rhs(), x, -3, 3)
p +=plot(solve(ed, y)[0].substitute(c == 4).rhs(), x, -3, 3)
show(p)
```



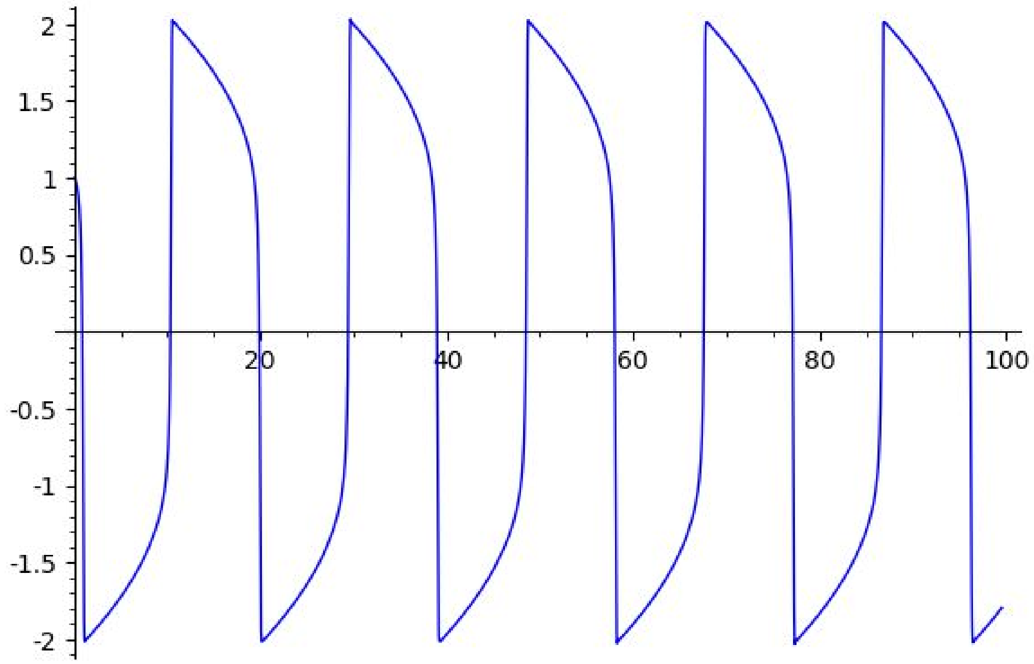
In [34]:
```
# Eulerova metóda na numerické riešenie obyčajných diferenciálnych rovníc
# Vstupy: funkcia y'=f(x,y), interval [a,b], začiatočná hodnota [a,y(a)]
# n - počet bodov v tabuľke pre funkciu y(x), pozn: y(a)=y(0)
# xk= y(xk-1)+h*f(xk-1,yk-1); h=(b-a)/n
# výstup: tabuľka bodov funkcie y(x): [[x0,y0],[x1,y1],..,[xn,yn]]
# 29.11.2018, P. Szabó
var("x,y")
f(x,y)=cos(x)+sin(y)+x*y
n=15
a=0
b=2
y0=8
#compute the step size
h = (b-a)/n
#create the table of approximations
table = [(a, y0)]
prevx = a
prevy = y0
for i in [1,2,..,n]:
    #compute the new values
    newx = prevx+h
    newy = prevy + h*f(prevx, prevy)
    #add them the to the table
    table += [(newx, newy)]
    #"move" to the new values
    prevx = newx.n()
    prevy = newy.n()
    #plot the obtained table
list_plot(table,size = 50).show()
```



In [35]:
```
# Eulerova metóda na numerické riešenie obyčajných diferenciálnych rovníc
# Vstupy: funkcia y'=f(x,y), interval [a,b], začiatočná podmienka [a,y(a)]
# n - počet bodov v tabuľke pre funkciu y(x), pozn: y(a)=y(0)
# výstup: tabuľka bodov funkcie y(x): [[x0,y0],[x1,y1],..,[xn,yn]]
# aplikácia @interact - interaktívne vstupy, pozri[1]
# 29.11.2018, P. Szabó
var("x,y")
@interact
def EulerDEInteract(
    f = input_box(default= cos(x)+sin(y)+x*y),
    n = slider(vmin=0, vmax=100, step_size=1,
               default=3,
               label="Select the order n: "),
    a = input_box(default= 0),
    b = input_box(default = 2),
    y0= input_box(default = 8)):
    #this it to avoid a warning message
    f(x,y)=f
    #compute the step size
    h = (b-a)/n
    #create the table of approximations
    table = [(a, y0)]
    prevx = a
    prevy = y0
    for i in [1,2,..,n]:
        #compute the new values
        newx = prevx+h
        newy = prevy + h*f(prevx, prevy)
        #add them the to the table
        table += [(newx, newy)]
        #"move" to the new values
        prevx = newx.n()
        prevy = newy.n()
    #plot the obtained table
    list_plot(table,size = 50).show()
```

In [36]:
```
# Štruktúrované riešenie diferenciálnych rovníc
# T - je objekt na riešenie obyčajných diferenciálnych rovníc (ODE)
# T.function - je funkcia na pravej strane
# T.algorithm - je algoritmus na riešenie ODE "rk8pd"
#                 Runge Kutta Prince Domand method
#            štandardná metóda na numerické riešenie ODE (2022 dec.)
# T.ode_solve - riešenie, iteratívne nájdenie funkčných hodnôt funkcie
# T.interpolate_solution - interpolačná funkcia podľa nájdených bodov
T = ode_solver()
def f_1(t,y,params): return [y[1],params[0]*(1-y[0]^2)*y[1]-y[0]]
T.function = f_1
# def j_1(t,y,params):
#    return [[0, 1], [-2*params[0]*y[0]*y[1]-1, params[0]*(1-y[0]^2)],[0,0]]
# T.jacobian = j_1
T.algorithm = "rk8pd"
T.ode_solve(y_0=[1,0], t_span=[0,100], params=[10],num_points=1000)
f = T.interpolate_solution()
plot(f, 0, 100)
```

Out[36]:



In [37]:
```
# Interpolácia - Lagrangeov polynóm
# Na vstupe máme hodnoty [xi,yi], i=0,1,,.,n-1
# Na výstupe polynóm f rádu n-1 pre ktorý f(xi)=yi, i=0,1,,.,n-1
# Y pohľadu programovania je to ukážka ako aplikovať zabudované funkcie
# Vstupné body je možné modifikovať  - @interact

def Lagrange_Basis(i, points):
    var("x")
    n = len(points)-1
    Li=1
    for j in [0,1,..,n] :
        if(i!=j):
            Li *= (x-points[j][0])/(points[i][0]-points[j][0])
    return Li

def Lagrange_Polynomial(points):
    var("x")
    n = len(points)-1
    p=0*x
    for i in [0,1,..,n]:
        p +=  points[i][1]*Lagrange_Basis(i,points)
    return p.full_simplify()

@interact
def LagrangeInterpolationInteract(
    points = input_box(default = [(-3,-15),(-1,-5),(0,1),(2,10),
    (3,15)]) ):
    # print "p(x)=", Lagrange_Polynomial(points)
    r2=LatexExpr(" f(x)=")+latex(Lagrange_Polynomial(points))
    show(r2)
```

In [38]:
```
# Interpolácia - Lagrangeov polynóm
# (existujú aj iné interpolačné algoritmy)
# Na vstupe máme hodnoty [xi,yi], i=0,1,,.,n-1
# Na výstupe polynóm f rádu n-1 pre ktorý f(xi)=yi, i=0,1,,.,n-1

def Lagrange_Basis(i, points):
    var("x")
    n = len(points)-1
    Li=1
    for j in [0,1,..,n] :
        if(i!=j):
            Li *= (x-points[j][0])/(points[i][0]-points[j][0])
    return Li

def Lagrange_Polynomial(points):
    var("x")
    n = len(points)-1
    p=0*x
    for i in [0,1,..,n]:
        p +=  points[i][1]*Lagrange_Basis(i,points)
    return p.full_simplify()


points = [(-3,-15),(-1,-5),(0,1),(2,10), (3,15)]
# print "p(x)=", Lagrange_Polynomial(points)
r2=LatexExpr(" f(x)=")+latex(Lagrange_Polynomial(points))
show(r2)
```

$$f(x) = \frac{1}{18}x^4 - \frac{1}{18}x^3 - \frac{11}{18}x^2 + \frac{11}{2}x + 1$$

In [39]:
```
# Laplasova transformácia
# vstup: funkcia f(t)
# výstup: Laplasov obraz funkcie f(t)

f(t) = t*cos(t)
L(s) = laplace(f, t, s)
q=LatexExpr('\\mathcal{L}\\{t*cos(t)\\}=')
show(q,L(s))
```

$$\mathcal{L}\{t * cos(t)\} = \frac{2\,s^2}{\left(s^2+1\right)^2} - \frac{1}{s^2+1}$$

In [40]:
```
# Laplasova transformácia
# vstup: F(s) Laplasov obraz funkcie
# výstup: f(t) Laplasov originál

L(s) = 5*e^(-3)/(s - 1)^2
f(t) = inverse_laplace( L(s), s, t )
q=LatexExpr('\\mathcal{L_{-1}}\\{5*e^{-3}/(s - 1)^2\\}=')
show(q,f(t))
```

$$\mathcal{L}_{-1}\{5 * e^{-3}/(s-1)^2\} = 5\,te^{(t-3)}$$

Literatúra

[1] Bibliography. In George Lindfield and John Penny, editors, *Numerical Methods (Fourth Edition) using MATLAB*, pages 565–567. Academic Press, fourth edition edition, 2019. ISBN 978-0-12-812256-3. doi: https://doi.org/10.1016/B978-0-12-812256-3.00023-3. URL https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/B9780128122563000233.

[2] Gregory V. Bard. *Sage for Undergraduates: Second Edition, Compatible with Python 3*. American Mathematical Society, 2022. ISBN 978-1-4704-6155-3. URL https://bookstore.ams.org/mbk-143/.

[3] Samuel Daniel Conte and Carl de Boor. *Elementary Numerical Analysis: an Algorithmic Approach*. Society for Industrial and Applied Mathematics, 2018. ISBN 9781611975192. URL https://doi.org/10.1137/1.9781611975208.

[4] David F. Griffiths and Desmond J. Higham. *Learning LaTex*. Society for Industrial and Applied Mathematics, 1997. doi: 10.1137/1.9780898719567. URL https://epubs.siam.org/doi/abs/10.1137/1.9780898719567.

[5] Katedra matematiky a deskriptívnej geometrie STU, kolektív autorov. Analytická geometria, lineárna algebra a diferenciálny počet, 2010. URL https://www.math.sk/skripta/.

[6] Katedra matematiky a deskriptívnej geometrie STU, kolektív autorov. Integrálny počet a diferenciálne rovnice, 2010. URL https://www.math.sk/skripta2/.

[7] Jaromír Kuben and Petra Šarmanová. *Diferenciální počet funkcí jedné proměnné*. VYSOKÁ ŠKOLA BÁŇSKÁ – TECHNICKÁ UNIVERZITA OSTRAVA, 2006. ISBN 80-248-1192-8. URL https://homel.vsb.cz/~s1a64/cd/pdf/print/dp.pdf.

[8] Elliot Mendelson. *Schaum's Outline of - 3000 Solved Problems in Calculus*. McGraw Hill, 2009. ISBN 978-0-07-170261-4. URL https://math24.files.wordpress.com/2016/02/3000-solved-problems-in-calculus.pdf.

[9] Razvan A. Mezei. *An Introduction to SAGE Programming with Applications to Sage Interacts for Numerical Methods*. John Wiley & Sons, 2016. ISBN 978-1-119-12280-7. URL https://www.wiley.com/en-us/AnIntroductiontoSAGEProgramming:WithApplicationstoSAGEInteractsforNumericalMethods-p-9781119122807.

[10] Jurg Nievergelt, J. Craig Farrar, and Edward M. Reingold. *Computer Approaches to Mathematical Problems*. Prentice-Hall, 1st edition, 1974. ISBN 978-0131648555.

[11] Zimmermann Paul, Casamayou Alexandre, Cohen Nathann, Guillaume Connan, Thierry Dumont, Laurent Fousse, François Maltey, Matthias Meulien, Marc Mezzarobba, Clément Pernet, Nicolas M. Thiéry, Erik Bray, John Cremona, Marcelo Forets, Alexandru Ghitza, and Hugh Thomas. *Computational Mathematics with SageMath*. Society for Industrial and Applied Mathematics, 2018. ISBN 978-1-611975-45-1. URL https://my.siam.org/Store/Product/viewproduct/?ProductId=30174951.

[12] Peter Szabó and Tibor Muszka. Virtuálny počítač v sieti TUKE - vybrané kapitoly z numerickej matematiky, 2022. URL https://moodle.tuke.sk/moodle/course/view.php?id=1917.

[13] Šárka Hošková, Jaromír Kuben, and Pavlína Račková. *Integrální počet funkcí jedné proměnné*. VYSOKÁ ŠKOLA BÁŇSKÁ – TECHNICKÁ UNIVERZITA OSTRAVA, 2006. ISBN 80-248-1191-X. URL https://homel.vsb.cz/~s1a64/cd/pdf/ip/ip_obr.pdf.